

Geometria Różniczkowa II

wykład jedenasty

Geometria wiązki kostycznej. Kolejny wykład poświęcony będzie geometrii wiązki kostycznej. Z podstawowego kursu GR wiemy, że $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ jest wiązką wektorową z włóknem typowym \mathbb{R}^n ($\dim M = n$). Wybór układu współrzędnych (q^i) w otwartym zbiorze $\mathcal{U} \subset M$ pozwala wprowadzić układ współrzędnych w $\pi_M^{-1}(\mathcal{U})$ liniowy we włóknach wiązki. Każdy kowektor $p \in T_q^*M$ można zapisać w bazie przestrzeni T_q^*M składającej się z różniczek funkcji q^i : $p = p_i(p)dq^i(q)$. Przyporządkowanie punktowi p liczb $(q^i(q), p_j(p))$ jest układem współrzędnych w $\pi_M^{-1}(\mathcal{U})$.

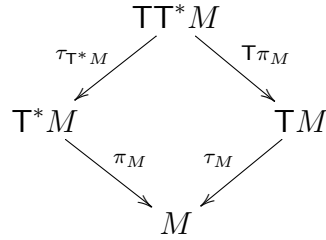
Najbardziej znaną i najczęściej używaną strukturą geometryczną na wiązce kostycznej jest kanoniczna forma symplektyczna ω_M . Poświęcimy teraz chwilę czasu na jej definicję oraz zaprezentowanie podstawowych własności. Forma symplektyczna na wiązce kostycznej jest odwzorowaniem dwuliniowym antysymetrycznym działającym na wektorach stycznych do przestrzeni T^*M . Musimy więc przyzwyczaić się do używania iterowanych funktorów stycznych. Rozmaitość TT^*M wyposażona jest w dwie struktury wiązki wektorowej: $\tau_{T^*M} : TT^*M \rightarrow T^*M$ oraz $T\pi_M : TT^*M \rightarrow TM$. Struktury te są ze sobą zgodne, tzn pola Eulera związane z obiema wiązkami komutują. Zapiszmy te pola we współrzędnych. Wybór układu współrzędnych (q^i) w $\mathcal{U} \subset M$ umożliwia skonstruowanie współrzędnych $(q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_l)$ zgodnych ze strukturą podwójnej wiązki wektorowej. W tych współrzędnych pole Eulera związane z wiązką τ_{T^*M} ma postać

$$\nabla_1(q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_l) = \dot{q}^i \partial_{\dot{q}^i} + \dot{p}_j \partial_{\dot{p}_j},$$

podczas kiedy pole związane z wiązką $T\pi_M$ to

$$\nabla_2(q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_l) = p_i \partial_{p_i} + \dot{p}_j \partial_{\dot{p}_j}.$$

Podwójną wiązkę wektorową wygodnie jest prezentować za pomocą diagramu



Odpowiednie rzuty we współrzędnych zapisują się następująco:

$$\begin{aligned}
 \tau_{T^*M} : (q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_l) &\longmapsto (q^i, p_j) \\
 T\pi_M : (q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_l) &\longmapsto (q^i, \dot{q}^k)
 \end{aligned}$$

Niech v będzie elementem TT^*M . Kowektor $\tau_{T^*M}(v)$ i wektor $T\pi_M(v)$ są zaczepione w tym samym punkcie rozmaitości M , Można je więc na sobie obliczyć. Odwzorowanie

$$TT^*M \ni v \longmapsto \langle \tau_{T^*M}(v), T\pi_M(v) \rangle \in \mathbb{R}$$

jest liniowe ze względu na strukturę wektorową nad T^*M , jest więc jednoformą liniową na T^*M . Jednoformę tę nazywamy *formą Liouville'a* i oznaczamy θ_M . Mamy więc

$$\theta_M(v) = \langle \tau_{T^*M}(v), T\pi_M(v) \rangle.$$

Zwróćmy uwagę, że definicja formy Liouville'a zawiera jedynie naturalne struktury $\mathbb{T}\mathbb{T}^*M$, jest więc kanoniczna. W standardowych współrzędnych (q^i, p_j) mamy

$$\theta_M = p_i dq^i.$$

Różniczkę formy Liouville'a oznaczamy ω_M i nazywamy *kanoniczną formą symplektyczną* na przestrzeni kostycznej:

$$\omega_M = d\theta_M, \quad \omega_M = dp_i \wedge dq^i = dp_1 \wedge dq^1 + \cdots + dp_n \wedge dq^n.$$

Widzimy przy okazji, że forma ta jest w postaci Darboux. Współrzędne naturalne na \mathbb{T}^*M są współrzędnymi Darboux dla ω_M . Forma ω_M jest oczywiście zamknięta (bo zupełna) i niezdegenerowana (widać z wyrażenia na współrzędnych).

Forma symplektyczna, podobnie jak iloczyn skalarny, definiuje izomorfizm wiązki stycznej do rozmaitości symplektycznej i kostycznej do niej. Ogólnie, jeśli (P, ω) jest rozmaitością symplektyczną, to

$$\mathbb{T}P \ni v \longmapsto \omega_P(\cdot, v) \in \mathbb{T}^*P.$$

W naszym przypadku

$$\begin{aligned} \beta_M : \mathbb{T}\mathbb{T}^*M &\longrightarrow \mathbb{T}^*\mathbb{T}^*M \\ v &\longmapsto \beta_M(v) = \omega_M(\cdot, v) \end{aligned}$$

odwzorowanie to jest liniowym izomorfizmem wiązek wektorowych nad \mathbb{T}^*M , co wynika z samej definicji, ale ma też szereg innych własności. Jest, jak się okazuje także izomorfizmem podwójnych wiązek wektorowych oraz izomorfizmem struktur symplektycznych $(\mathbb{T}^*\mathbb{T}^*M, \omega_{\mathbb{T}^*M})$ oraz $(\mathbb{T}\mathbb{T}^*M, d_T\omega_M)$, ale o tym trochę później, albo wcale (bo nie wiadomo czy zdążymy). Zapiszmy β_M we współrzędnych:

$$v = \dot{q}^i \partial_{q^i} + \dot{p}_j \partial_{p_j}, \quad \omega_M = dp_k \wedge dq^k, \quad \beta_M(v) = -\iota(v)\omega_M = \dot{q}^k dp_k - \dot{p}_j dq^j$$

$$\beta_M(q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_l) = (q^i, p_j, -\dot{p}_k, \dot{q}^l)$$

Odwzorowanie β_M służy do produkowania pól wektorowych na \mathbb{T}^*M z funkcji na \mathbb{T}^*M . Niech $f : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie gładką funkcją. Wtedy X_f jest polem na \mathbb{T}^*M zadany warunkiem

$$\beta_M \circ X_f = df$$

Pisze się też

$$df = \omega_M(\cdot, X_f), \quad -\iota(X_f)\omega_M = df,$$

co oczywiście na jedno wychodzi. Użycie odwzorowania β_M jest wygodniejsze w bardziej złożonych sytuacjach niż przedstawiona powyżej najprostsza. Pole X_f nazywa się *polem hamiltonowskim* funkcji f . Pora na pole hamiltonowskie we współrzędnych:

$$f : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (q^i, p_j) \longmapsto f(q^i, p_j),$$

$$df : \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{T}^*\mathbb{T}^*M, \quad (q^i, p_j) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial f}{\partial p_j} dp_j.$$

Składając z β_M^{-1} otrzymujemy pole wektorowe

$$(q^i, p_j) \mapsto (q^i, p_j, \frac{\partial f}{\partial p_j}, -\frac{\partial f}{\partial q^i})$$

czyli

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_j} \partial_{q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \partial_{p_i}.$$

Sprawdźmy co będzie gdy $f(q, p) = H(q, p) = \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j + V(q)$:

$$X_H = \frac{1}{2m} g^{ij} p_j \partial_{q^i} - \frac{\partial V}{\partial q^k} \partial_{p_k}.$$

Krzywa całkowa $t \mapsto (q(t), p(t))$ powyższego pola spełnia równania

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{1}{m} g^{ij} p_j, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$$

Pierwsze równanie to związek między pędem a prędkością. Drugie mówi, że zmiana pędu w czasie jest proporcjonalna do „minus” różniczki potencjału, czyli do czegoś zazwyczaj rozumianego jako siła. Układ równań

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \end{aligned}$$

który odpowiada polu pochodzącemu od hamiltonianu nazywa się zazwyczaj *równaniami Hamiltona* układu mechanicznego opisywanego przez H . Rozwiązaniem tego układu są krzywe w przestrzeni fazowej (T^*M), czyli w przestrzeni położeń i pędów.

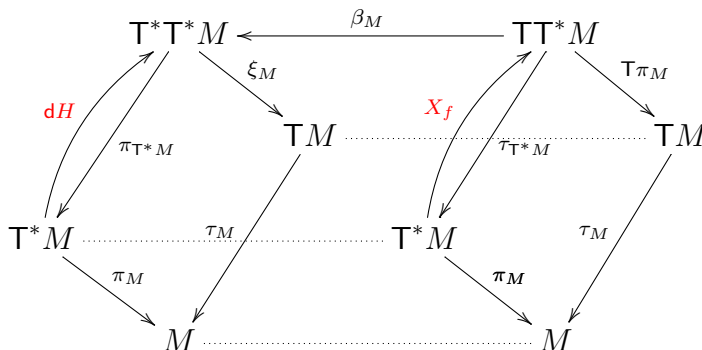
Zadanie 1 Obliczyć

$$\mathcal{L}_{X_f} \omega_M.$$

Rozwiązanie:

$$\mathcal{L}_{X_f} \omega_M = d\iota(X_f)\omega_M + \iota(X_f)d\omega_M = d(-df) + 0 = 0$$

I jeszcze jeden obrazek do kompletu:



Geometria wiązki stycznej. Zajmiemy się teraz geometrią wiązki stycznej. Poprzednie doświadczenia wskazują, że zająć się będzie trzeba bez wątpienia iterowanymi wiązkami $\mathbb{T}M$ oraz $\mathbb{T}^*\mathbb{T}M$. Najpierw jednak przypomnijmy operację podniesienia pionowego, która jest charakterystyczna dla każdej wiązki wektorowej. Niech więc w ogólności $\tau : E \rightarrow M$ będzie wiązką wektorową. Mówiliśmy już, że wektory styczne do E i pionowe względem rzutu τ (tzn takie, że $v \in T_e E$, $\mathbb{T}\tau(v) = 0$) można punkt po punkcie w E utożsamiać z elementami włókna E ,

$$\mathbb{V}_e E \simeq E_{\tau(e)}.$$

Istnienie takiego utożsamienia pozwala na podnoszenie elementów E do wektorów stycznych do E . Niech $e, f \in E$ i niech $\tau(e) = \tau(f)$. Podniesieniem pionowym f do punktu e nazywaliśmy wektor styczny do krzywej

$$t \mapsto e + tf$$

w $t = 0$. Stosowny wektor styczny oznaczamy $f_e^\vee \in \mathbb{V}_e E$. To samo można zrobić dla wiązki stycznej τ_M biorąc $E = \mathbb{T}M$. Mamy podniesienie

$$\mathbb{T}M \times_M \mathbb{T}M \ni (v, w) \mapsto w_v^\vee \in \mathbb{V}M \subset \mathbb{T}M.$$

Jeśli $E = \mathbb{T}M$, możemy, używając podniesienia pionowego, skonstruować kanoniczny endomorfizm

$$S_M : \mathbb{T}M \longrightarrow \mathbb{T}M.$$

Wzór jest prosty (choć wygląda raczej paskudnie):

$$S_M(v) = [\mathbb{T}\tau_M(v)]_{\tau_M(v)}^\vee$$

Endomorfizm S_M jest złożeniem rzutów $\mathbb{T}\tau_M$ i $\tau_{\mathbb{T}M}$ i podniesienia pionowego. Na dowolnej wiązce wektorowej takiego endomorfizmu nie ma, bo rzuty $\mathbb{T}\tau$ i τ_E mają inne przeciwdziedziny. We współrzędnych $(q^i, \dot{q}^j, \delta q^k, \delta \dot{q}^l)$ mamy:

$$\begin{aligned} v &= \delta q^k \partial_{q^k} + \delta \dot{q}^k \partial_{\dot{q}^k} \\ \mathbb{T}\tau_M(v) &= \delta q^k \partial_{q^k} \\ \tau_{\mathbb{T}M}(v) &= \dot{q}^k \partial_{q^k} \\ S_M(v) &= \delta q^k \partial_{\dot{q}^k} \end{aligned}$$

czyli

$$S_M(q^i, \dot{q}^j, \delta q^k, \delta \dot{q}^l) = (q^i, \dot{q}^j, 0, \delta q^k).$$

Odwzorowanie S jest endomorfizmem wiązki $\tau_{\mathbb{T}M}$. Obrazem tego endomorfizmu jest podwiązka wektorów pionowych. Wiązka τ_M jest wiązką wektorową, zatem istnieje na niej pole Eulera

$$\nabla_{\mathbb{T}M}(v) = v_v^\vee.$$

So czego może przydać się endomorfizm kanoniczny S_M ? Pewnie ma dużo zastosowań. Przytoczymy jedno z nich przydatne w tradycyjnym sformułowaniu mechaniki lagranżowskiej. Równania różniczkowe drugiego rzędu rozwiązujemy często zamieniając je na układ równań pierwszego rzędu na zmienne i ich pochodne. W ujęciu geometrycznym oznacza to, że równanie drugiego

rzędu zapisujemy jako pole wektorowe na wiązce stycznej do rozmaitości. Punkty na rozmaitości reprezentują zmienne a wektory styczne zmienne wraz z pochodnymi. Oczywiście w ten sposób dostajemy jedynie niektóre pola wektorowe na TM . Jak sprawdzić, czy pole wektorowe pochodzi od równania drugiego rzędu? Można na przykład sprawdzić, czy

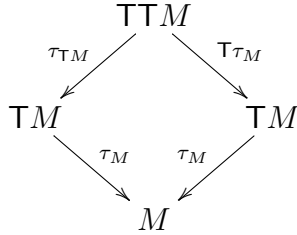
$$S(X(v)) = \nabla_{TM}(v).$$

Z grubsza sprawdza się to popatrzenia czy rzuty $\mathbb{T}\tau_M$ i τ_{TM} wektorów stanowiących wartości pola X są takie same. Równanie Eulera Lagrange'a jest drugiego rzędu, można więc próbować geometrycznie przedstawiać je jako pole wektorowe na wiązce stycznej. Dokładniej zajmiemy się tym w następnym wykładzie. Teraz powróćmy do badania struktury wiązki stycznej.

Pamiętamy także, że TTM jest podwójną wiązką wektorową. Stosowne pola Eulera mają postać

$$\begin{aligned}\nabla_1 &= \delta q^k \partial_{\delta q^k} + \delta \dot{q}^k \partial_{\delta \dot{q}^k} \\ \nabla_2 &= \dot{q}^k \partial_{\dot{q}^k} + \delta \dot{q}^k \partial_{\delta \dot{q}^k}\end{aligned}$$

Pole ∇_1 związane jest ze strukturą τ_{TM} a pole ∇_2 ze strukturą $\mathbb{T}\tau_M$.



Iterowana wiązka styczna wyposażona jest także w kanoniczne odwzorowanie κ_M , które pojawiło się już na tym wykładzie, ale nie było omówione dokładnie. Ma ono źródło w rachunku wariacyjnym. Załóżmy, że M jest przestrzenią położeń jakiegoś układu mechanicznego nie-relatywistycznego. Ruch tego układu opisany będzie krzywą $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$. Badając układ w sposób wariacyjny zazwyczaj deformujemy nieco trajektorię układu wzdłuż nowego parametru rzeczywistego s , co możemy zapisać jako odwzorowanie

$$\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \mapsto \chi(s, t) \in M$$

takie, że $\chi(0, t) = \gamma(t)$. Przyda nam się także ustalenie punktu $q \in M$, $q = \chi(0, 0)$. Lagranżjan określony jest zazwyczaj na położeniach i prędkościach, czyli na wiązce stycznej. Żeby obliczyć wariację działania musimy umieć zwariować także prędkości. Podnosimy więc odwzorowanie χ do wiązki stycznej biorąc wektory styczne względem parametru t . Parametr s mierzy wariację:

$$\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \mapsto \mathbf{t}^{(0,1)}\chi(s, t) \in TM.$$

Zazwyczaj interesują nas wariacje infinitezymalne. Geometrycznie reprezentujemy je jako wektory styczne do krzywych parametryzowanych przez s . W szczególności wariacja prędkości w punkcie q ($t = 0$), to wektor styczny do krzywej

$$s \mapsto \mathbf{t}^{(0,1)}\chi(s, 0),$$

będącej krzywą w $\mathbb{T}M$. Infinitesimalna wariacja prędkości jest więc elementem $\mathbb{T}\mathbb{T}M$. Z drugiej strony całkując przez części przy wyprowadzeniu równań Eulera-Lagrange'a chcemy traktować wariację prędkości raczej jako pochodną po czasie t wariacji położenia. Oznacza to, że najpierw bierzemy wektory styczne względem parametru s :

$$\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \longmapsto \mathbf{t}^{(1,0)}\chi(s, t) \in \mathbb{T}M,$$

a potem ustalamy $s = 0$

$$t \longmapsto \mathbf{t}^{(1,0)}\chi(0, t),$$

i różniczkujemy względem t otrzymując inny wektor styczny do $\mathbb{T}M$. Jest on zaczepiony w innym punkcie \mathbb{T}_qM ! Odwzorowanie, które przypisuje wariacji prędkości podniesienie styczne wariacji położenia jest szukanym κ_M . Opowiedzieliśmy o κ_M poglądowo, teraz pora na precyzyjne wzory. Wygodnie jest ustalić pewną konwencję: Niech $v = (q, \dot{q}, \delta q, \dot{\delta}q)$. Mówimy, że χ jest reprezentantem v jeśli $v = \mathbf{t}^{(0,1)}\chi(0, 0)$, to znaczy między innymi, że

$$(q, \dot{q}) = \mathbf{t}^{(0,1)}\chi(0, 0), \quad (q, \delta q) = \mathbf{t}^{(1,0)}\chi(0, 0).$$

W ten sposób na poziomie reprezentantów κ_M realizuje się jako

$$\chi \longmapsto \tilde{\chi}, \quad \tilde{\chi}(s, t) = \chi(t, s).$$

Analizując przykładowe χ dla $v = (q, \dot{q}, \delta q, \dot{\delta}q)$:

$$\chi^i(s, t) = q^i + t\dot{q}^i + s\delta q^i + st\dot{\delta}q^i.$$

Widzimy, że

$$\kappa_M(q, \dot{q}, \delta q, \dot{\delta}q) = (q, \delta q, \dot{q}, \dot{\delta}q).$$

Okazuje się, że tak proste odwzorowanie ma bardzo istotne zastosowania zarówno w geometrii wiązki stycznej jak i w mechanice.

Zadanie 2 *Posługując się rachunkiem na współrzędnych wykazać, że jeśli X i Y są dwoma polami wektorowymi na rozmaitości M , to zachodzi wzór*

$$\kappa_M(\mathbb{T}Y(X)) - \mathbb{T}X(Y) = [X, Y]_X^\vee.$$

Odwzorowanie κ_M zamienia rzuty związane ze strukturą podwójnej wiązki w $\mathbb{T}\mathbb{T}M$. κ_M jest izomorfizmem podwójnych wiązek wektorowych:

