Geometria Różniczkowa II

wykład dwunasty

Lagranżowski opis mechaniki tradycyjnie kojarzony jest z równaniem Eulera-Lagrange'a. Równanie Eulera-Lagrange'a wyprowadzamy z zasady wariacyjnej, używając zazwyczaj rachunku na współrzędnych. Posługujemy się tutaj analogią z układami statycznymi: zamiast położeń układu mamy krzywe (ruchy), zamiast energii wewnętrznej działanie. Punkt równowagi to punkt ekstremalny energii wewnętrznej, szukamy więc punktów ekstremalnych działania starając się stosować metody podobne do różniczkowych. W statyce punkty równowagi układów potencjalnych to te punkty w których różniczka potencjału znika. Liczymy więc coś w rodzaju różniczki działania. Wariacje krzywej odgrywają rolę wektorów stycznych do konfiguracji na których różniczkę działania obliczamy. Będziemy używać następujących oznaczeń: krzywa, którą poddajemy wariacji to $t \mapsto \gamma(t)$, we współrzędnych $t \mapsto \gamma^i(t)$. Wariacje odbywają się wzdłuż parametru s, mamy więc też odwzorowanie $(s,t) \mapsto \chi(s,t)$, we współrzędnych $(s,t) \mapsto \chi^i(s,t)$, takie, że $\chi(0,t) = \gamma(t)$. Pochodną po t oznaczać będziemy kropką a po s symbolem δ. Oznacza to, że np. $t \mapsto \dot{\gamma}^i(t)$ to prolongacja krzywej γ do $\mathsf{T}M$, zaś $t \mapsto \delta\chi(0,t)$ to krzywa w $\mathsf{T}M$, której wartościami są wektory styczne do krzywych $s \mapsto \chi(s,t)$ dla każdego ustalonego t w $s = 0$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}_{|s=0} S(\chi(s,\cdot)) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}_{|s=0} \int_a^b L(\dot{\chi}(s,t))\mathsf{d}t = \int_a^b \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}_{|s=0} L(\dot{\chi}(s,t))\mathsf{d}t = \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta\chi^i(0,t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \color{red}{\delta\dot{\chi}^i(0,t)} \right] \mathsf{d}t = \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta\dot{\chi}^i(0,t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \color{red}{(\delta\chi^i)^{\cdot}(0,t)} \right] \mathsf{d}t = \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta\dot{\chi}^i(0,t) + \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta\chi^i(0,t) \right) - \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta\chi^i(0,t) \right] \mathsf{d}t = \\
&= \int_a^b \color{blue}{\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right)} \delta\chi^i(0,t)\mathsf{d}t + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta\chi^i(0,t) \right|_a^b
\end{aligned}
$$

Typowa argumentacja jest dalej następująca: wśród wszystkich krzywych $t \mapsto \delta\chi(0,t)$ wyróżniamy znikające na końcach, tzn. takie, że wektory $\delta\chi(0,a)$ i $\delta\chi(0,b)$ znikają. W ten sposób wyrazy brzegowe przestają się liczyć. Jeśli różniczka S ma znikać, dla dowolnych wariacji znikających na końcach to wyrażenie zaznaczone na niebiesko pod całką musi znikać. Wyrażenie to przyrównane do zera daje właśnie równanie Eulera-Lagrange'a:

$$
\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0.
$$

Po wykonaniu różniczkowania po t widzimy, że jest to równanie (układ równań) drugiego rzędu:

$$
\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j = 0
$$

Jeśli potraktuje się analogię statyczną do końca poważnie i dalej prowadzi rozumowanie w ten sposób niechybnie wpada się w kłopoty. Zazwyczaj więc wszelkie wyprowadzenia rownań ruchu zatrzymują się w tym miejscu. Żeby pociągnąć sprawę dalej i nie stracić sensowności rozumowania, a nawet coś zyskać, trzeba zmienić punkt widzenia. Ale o tym później. Na razie zajmujemy się *tradycyjną* mechaniką lagranżowską.

Z punktu widzenia geometrycznego równanie E-L określa podzbiór w $\mathsf{T}^2 M$. Zapisane we współrzędnych równanie to jest zadane w sposób uwikłany ze względu na $\ddot{q}$. Fizycy nie lubią jednak równań różniczkowych zapisanych w postaci podzbiorów-w-czymś-tam w sposób uwikłany. Fizycy lubią pola wektorowe! Jest to z resztą zrozumiałe, gdyż twierdzenie Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania dotyczy równań pierwszego rzędu zapisanych w sposób jawny, tzn, geometrycznie mówiąc, pól wektorowych! Mając to twierdzenie możemy dokonywać rozmaitych cudów zmierzających do rozwiązania równania nie przejmując się nadmiernie formalnościami. Ważne, żeby na końcu okazało się, że to co mamy to jest rozwiązanie. A skąd je wzięliśmy - to już nie takie ważne!

Fakt, że równania E-L są drugiego rzędu nie jest jeszcze taki kłopotliwy. W drugim semestrze analizy nauczyliśmy się radzić sobie z takim problemem - zamieniamy równanie drugiego rzędu na równanie pierwszego rzędu na zmienne i ich pochodne. Gorzej z postacią uwikłaną. Żeby było pole wektorowe potrzebujemy równanie w postaci $\ddot{q}^i = \cdots$, a to się może udać, a może nie!

Dla celów rachunkowych oznaczmy $F_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ oraz $H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}$. Wyrazy macierzowe macierzy F i H zależą od q^i oraz $\dot{q}^j$. Równanie E-L w nowych oznaczeniach to

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} - H_{ij}\dot{q}^i - F_{ij}\ddot{q}^i = 0$$

W sposób jawny można to równanie zapisać gdy macierz F_{ij} jest odwracalna. Wtedy

$$\ddot{q}^i = (F^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - H_{kj}\dot{q}^k\right).$$

Pole wektorowe na $\mathsf{T}M$, które odpowiada powyższemu równaniu drugiego rzędu to

$$X_{E-L} = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (F^{-1})^{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - H_{kj}\dot{q}^k\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Zauważmy, że to pole ma własność $S(X_{E-L}(v)) = \nabla_{\mathsf{T}M}(v)$. Naszym zadaniem będzie teraz konstrukcja pola X_{E-L} w sposób geometryczny, tzn bez użycia współrzędnych.

Odwozorowanie Legendre'a: Rozważmy T^*E, czyli wiązkę kostyczną do wiązki wektorowej. Pamiętamy (być może), że wektory pionowe w $\mathsf{T}_e E$, czyli styczne do włókna E_q w punkcie e można utożsamić z elementami włókna E_q. Kowektor $\varphi \in \mathsf{T}^*_e E$ obcięty do pionowych jest więc elementem E^*_q. W ten sposób powstaje odwzorowanie $\xi_E : \mathsf{T}^*E \to E^*$. Okazuje się, że wiązka ξ_E jest wiązką wektorową, a diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{T}^*E \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dr, "\pi_E"] & \\
E^* \arrow[dr, "\pi"'] & & E \arrow[dl, "\tau"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

opisuje strukturę podwójnej wiązki wektorowej. Biorąc $E = \mathsf{T}M$ dostajemy

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{T}^*\mathsf{T}M \arrow[dl, "\xi_{\mathsf{T}M}"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathsf{T}M}"] & \\ \mathsf{T}^*M \arrow[dr, "\pi_M"'] & & \mathsf{T}M \arrow[dl, "\tau_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Różniczka lagranżjanu $L : \mathsf{T}M \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem $\mathsf{d}L : \mathsf{T}M \to \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$. Odwzorowanie Legendra'a to złożenie $\lambda = \xi_{\mathsf{T}M} \circ \mathsf{d}L$:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{T}^*\mathsf{T}M \arrow[dl, "\xi_{\mathsf{T}M}"'] \arrow[dr, dotted, no head] & \\ \mathsf{T}^*M \arrow[dr, dotted, no head] & & \mathsf{T}M \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[ul, bend right, "\mathsf{d}L"'] \arrow[dl, dotted, no head] \\ & M & \end{tikzcd}$$

We współrzędnych

$$\xi(q^i, \dot{q}^j, a_k, b_l) = (q^i, b_j),$$

zatem odwzorowanie Legendre'a to

$$\lambda(q^i, \dot{q}^j) = (q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}).$$

Odwzorowanie Legendre'a przyporządkowuje prędkościom pędy. Na przykład dla lagranżjanu mechanicznego

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q^k)$$

mamy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = \frac{m}{2} 2 g_{ij} \dot{q}^i = m g_{ij} \dot{q}^i.$$

Bez współrzędnych napisalibyśmy

$$\lambda(v) = mg(v, \cdot) = m\tilde{g}(v),$$

gdzie $\tilde{g}$ jest izomorfizmem wiązki stycznej i kostycznej pochodzącym od metryki. W pewnym sensie więc pęd to masa razy prędkość, a „pewien" sens polega na nie rozróżnianiu między wektorami a kowektorami, co na przestrzeni z metryką bywa wygodne.

Z definicji odwzorowania λ wynika, że zachowuje ono rzut na M, tzn obraz włókna wiązki stycznej nad q jest we włóknie wiązki kostycznej nad q. Macierz F jest macierzą pochodnej odwzorowania λ liczonej wzdłuż włókien wiązki stycznej. Odwracalność tej macierzy oznacza (Twierdzenie o Lokalnej Odwracalności), że lokalnie odwzorowanie λ jest dyfeomorfizmem. W takim przypadku mówimy, że lagranżjan jest *regularny*. Jeśli odwracalność jest globalna, tzn λ jest globalnym dyfeomorfizmem $\mathsf{T}M$ i T^*M mówimy, że lagranżjan jest *hiperregularny*. Tak właśnie jest dla lagranżjanu mechanicznego związanego z metryką. Odwzorowanie $\tilde{g}$ jest globalnym dyfeomorfizmem. Dla lagranżjanu mechanicznego zatem równanie E-L da się odwikłać i zapisać jako pole wektorowe na wiązce stycznej. W dalszym ciągu zakładać będziemy, że lagranżjan jest regularny.

Symbolem ω_L bedziemy oznaczać formę $\lambda^*\omega_M$ na $\mathsf{T}M$. Dla regularnego lagranżjanu forma ta jest symplektyczna, może więc posłużyć do produkowania hamiltonowskich pól wektorowych z funkcji na $\mathsf{T}M$.

Twierdzenie 1 *Równanie Eulera-Lagrange'a dla regularnego lagranżjanu L jest reprezentowane przez hamilonowskie pole wektorowe funkcji energii*

$$E(v) = \langle \lambda(v), v \rangle - L(v)$$

względem formy ω_L.

Dowód: Przeprowadzimy odpowiednie rachunki na współrzędnych. Zacznijmy od formy ω_L:

$$\omega_L = \lambda^*\omega_M = \mathsf{d}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \wedge \mathsf{d}q^i =$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\mathsf{d}q^j \wedge \mathsf{d}q^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\mathsf{d}\dot{q}^j \wedge \mathsf{d}q^i = H_{ji}\mathsf{d}q^j \wedge \mathsf{d}q^i + F_{ij}\mathsf{d}\dot{q}^j \wedge \mathsf{d}q^i$$

Różniczka funkcji energii to

$$\mathsf{d}E = \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - H_{ij}\dot{q}^j\right)\mathsf{d}q^i - F_{ij}\dot{q}^j\mathsf{d}\dot{q}^i.$$

Pole wektorowe

$$X = A^i\frac{\partial}{\partial q^i} + B^j\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}$$

jest polem hamiltonowskim dla E jeśli

$$\mathsf{d}E = \omega_L(\cdot, X),$$

z różniczką energii trzeba więc porównać

$$\omega_L(\cdot, X) = \left(H_{ji}A^j - H_{ij}A^j + F_{ij}B^j\right)\mathsf{d}q^i - F_{ij}A^i\mathsf{d}\dot{q}^j.$$

Z porównania wynika, że $A^i = \dot{q}^i$, oraz

$$H_{ji}\dot{q}^j - H_{ij}\dot{q}^j + F_{ij}B^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - H_{ij}\dot{q}^j,$$

czyli

$$B^j = (F^{-1})^{jk}\left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - H_{lk}\dot{q}^l\right).$$

Z rachunków wynika zatem, że

$$X = \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} + (F^{-1})^{jk}\left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - H_{lk}\dot{q}^l\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} = X_{E-L}.$$

□

Zadanie 1 *W ramach ćwiczenia proszę policzyć funkcję energii dla lagranżjanu mechanicznego* $L(q,\dot q) = \frac{m}{2} g_{ij}\dot q^i \dot q^j - V$. *Znaleźć także* ω_L *oraz* X_{E-L}. *W przypadku potencjału* $V = 0$ *porównać wynik ze wzorami na podniesienie horyzontalne krzywej (przesunięcie równoległe) względem koneksji metrycznej.*

W powyższym zadaniu X_{E-L} dla $V = 0$ powinno wyjść

$$X_{E-L} = \dot q^i \frac{\partial}{\partial q^i} - m\Gamma^j_{ml}\dot q^m \dot q^l \frac{\partial}{\partial \dot q^j}.$$

Dla hiperregularnego lagranżjanu możemy funkcję energii złożyć z λ^{-1} otrzymując hamiltonian: $H(p) = E(\lambda^{-1}(p))$. Nikogo nie zdziwi, że pola X_H i X_{E-L} są λ- związane.

Niestety istnieją ważne fizyczne przykłady w których lagranżjan jest nieregularny. Mimo to chcielibyśmy opisywać takie układy na sposób lagranżowski i hamiltonowski. Oczywiście jest jasne, że trzeba będzie zgodzić się na jakieś ustępstwa. Skoro bowiem λ jest nieodwracalne i F_{ij} nie jest maksymalnego rzędu, to równanie $E-L$ nie da się odwikłać. Nadal jednak jest ono sensownym równaniem drugiego rzędu, konsekwencją zasad wariacyjnych. Szczególnie kłopotliwe jest przejście do opisu hamiltonowskiego: skoro nie ma λ^{-1}, to jak napisać hamiltonian? I w ogóle czy to ma jakiś sens? Na przykładzie swobodnej cząstki relatywistycznej zobaczymy, że dosyć dużo „przeżywa” z powyższego opisu mimo braku regularności. Okazuje się tylko, że narzędzia, których używamy są niedostosowane do sytuacji. Warto zatem poszukać lepszego języka geometrycznego.

W dalszym ciągu M będzie oznaczało czasoprzestrzeń Minkowskiego, czyli czterowymiarową przestrzeń afiniczną wyposażoną w stałą metrykę η o sygnaturze $(+ - --)$ i orientację wektorów czasowych. Symbolem V będziemy oznaczać modelową przestrzeń wektorową. W takim przypadku mamy ułatwiające życie identyfikacje $\mathsf{T}M \simeq M\times V$, $\mathsf{T}^*M \simeq M\times V^*$. Odwzorowanie $\tilde\eta : V \to V^*$, $\tilde\eta(v) = \eta(v,\cdot)$ jest izomorfizmem. Potrzebna będzie też iterowana wiązka styczna i kostyczna:

$$\mathsf{TT}M \simeq M\times V\times V\times V, \qquad \mathsf{T}^*\mathsf{T}M \simeq M\times V\times V^*\times V^*.$$

Ruch w czasoprzestrzeni opisywany jest przez linie świata, czyli jednowymiarowe podrozmaitości zorientowane, których wektory styczne są czasowe. Możemy traktować je jak krzywe parametryzując czasem własnym. Wtedy jednak musimy pracować z układem z więzami $\eta(v,v) = 1$. Uniknąć więzów można dopuszczając wszystkie parametryzacje. Jednak działanie od parametryzacji nie powinno zależeć, co oznacza, że lagranżjan powinien być jednorodny (dodatnio-jednorodny). Odpowiedni lagranżjan to

$$L(q,v) = m\sqrt{\eta(v,v)}$$

określony na zbiorze wektorów czasowych. Równanie także nie powinno preferować żadnej parametryzacji, zamiast pola wektorowego spodziewamy się więc raczej czegoś w rodzaju dystrybucji.

Jeśli $L(q,v) = m\sqrt{\eta(v,v)}$, to

$$\mathsf{d}L(q,v) = (q, v, 0, m\frac{\tilde\eta(v)}{\sqrt{\eta(v,v)}}),$$

i odwzorowanie Legendre'a przyjmuje postać

$$\lambda(q,v) = (q, m\frac{\tilde{\eta}(v)}{\sqrt{\eta(v,v)}}).$$

Łatwo zauważyć, że ten sam pęd otrzymamy dla całego kierunku wektorów, a w obrazie odwzorowania λ są jedynie pary (q,p) takie, że $\eta(p,p) = m^2$ (metrykę na przestrzeni dualnej oznaczyliśmy tą samą literą η). Zobaczmy co da się uratować z równania Eulera-Lagrange'a w wersji geometrycznej opisanej powyżej. Wiadomo, że wobec degeneracji λ forma ω_L jest jedynie presymplektyczna (zamknięta ale zdegenerowana). Funkcję energii można zapisać bez problemów

$$E(q,v) = \langle \lambda(q,v), (q,v)\rangle - L(q,v) = m\frac{\eta(v,v)}{\sqrt{\eta(v,v)}} - m\sqrt{\eta(v,v)} = 0,$$

ale równanie

$$\omega_L(\cdot, X) = 0$$

spełnianie jest w każdym punkcie (q,v) przez wiele wektorów X stycznych do $\mathsf{T}M$. Gdyby ω_L nie była zdegenerowana rozwiązaniem byłby jedynie wektor zerowy w każdym punkcie. Żeby sprawdzić jak wyglądają rozwiązania w naszym zdegenerowanym przypadku musimy wykonać trochę rachunków. Potrzebujemy w szczególności ω_M i $\mathsf{T}\lambda$. Forma ω_M jest stała, tzn. nie zależy od punktu (q,p). Na wektorach stycznych do T^*M $(q,p,\delta q_1, \delta p_1)$ i $(q,p,\delta q_1,\delta p_1)$ przyjmuje wartość (pomijamy w notacji punkt zaczepienia)

$$\omega_M((\delta q_1, \delta p_1), (\delta q_2, \delta p_2)) = \langle \delta p_1, \delta q_2\rangle - \langle \delta p_2, \delta q_1\rangle$$

Zgodnie z definicją

$$\omega_L((\delta q_1, \delta v_1), (\delta q_2, \delta v_2)) = \omega_M(\mathsf{T}\lambda(\delta q_1, \delta v_1), \mathsf{T}\lambda(\delta q_2, \delta v_2)),$$

potrzebujemy więc $\mathsf{T}\lambda$. Dla ułatwienia oznaczmy $|v| = \sqrt{\eta(v,v)}$

$$\mathsf{T}\lambda(q,v,\delta q,\delta v) = \left(q,\ \frac{m}{|v|}\tilde{\eta}(v),\ \delta q,\ \frac{m}{|v|}\tilde{\eta}(\delta v) - \frac{m\eta(v,\delta v)}{|v|^3}\tilde{\eta}(v)\ \right)$$

Niech wektor styczny $X \in \mathsf{TT}M$ w punkcie (q,v) ma składowe $(q,v,\delta q^X, \delta v^X)$. Warunek

$$\omega_L(\cdot, (\delta q^X, \delta v^X)) = 0$$

jest równoważny warunkowi

$$\forall \delta q, \delta v \quad \left\langle \frac{m}{|v|}\tilde{\eta}(\delta v) - \frac{m\eta(v,\delta v)}{|v|^3}\tilde{\eta}(v),\ \delta q^X \right\rangle - \left\langle \frac{m}{|v|}\tilde{\eta}(\delta v^X) - \frac{m\eta(v,\delta v^X)}{|v|^3}\tilde{\eta}(v),\ \delta q \right\rangle = 0$$

To samo zapisać można jako

$$\frac{m}{|v|^3}\left(\eta(v,v)\eta(\delta v, \delta q^X) - \eta(v,v)\eta(\delta v^X, \delta q) - \eta(v,\delta v)\eta(v,\delta q^X) + \eta(v,\delta v^X)\eta(v,\delta q)\right).$$

Z dowolnosci δq i δv wynika, że współczynniki przy nich muszą znikać oddzielnie. Przy δv dostajemy

$$\eta(v,v)\tilde{\eta}(\delta q^X) - \eta(v,\delta q^X)\tilde{\eta}(v) = 0,$$

to znaczy

$$\tilde{\eta}(\eta(v,v)\delta q^X) = \tilde{\eta}(\eta(v,\delta q^X)v).$$

Odwzorowanie $\tilde{\eta}$ jest izomorfimem, więc

$$\eta(v,v)\delta q^X = \eta(v,\delta q^X)v$$

co oznacza, że δq^X jest proporcjonalne do v, a współczynnik proporcjonalności jest dowolny. Przy δq dostajemy

$$\eta(v,\delta v^X)\tilde{\eta}(v) - \eta(v,v)\tilde{\eta}(\delta v^X),$$

co prowadzi do wniosku, że δv^X musi być proporcjonalne do v, a współczynnik proporcjonalności jest dowolny. Ostatecznie zamiast pola wektorowego na $\mathsf{T}M$ dostaliśmy podzbiór $\mathsf{TT}M$

$$\{(q,v,av,bv), a,b \in \mathbb{R}\}$$

nie całkiem pozbawiony sensu. Jeśli potraktujemy ten podzbiór jako równanie na linię świata w M, to dowiemy się z niego, że zmiana położenia jest wzdłuż v (długość wektora stycznego dowolna) i zmiana v też jest wzdłuż v, czyli wektor styczny może zmieniać długość, ale nie może zmieniać kierunku. Rozwiązaniami są więc proste czasowe, co ma sens. Zgubiliśmy tylko po drodze orientację. Wnioski są więc OK, ale narzędzia badawcze zupełnie do niczego. Zdecydowanie potrzebujemy czegoś prostszego niż nie-do-końca-zdefiniowane-pola-wektorowe. O tym „czymś” na następnym wykładzie!