

# Geometria Różniczkowa II

wykład trzynasty (ostatni)

W trakcie dzisiejszego – ostatniego – wykładu zmieniać będziemy punkt widzenia na dynamikę w nadziei na wypracowanie takiego sposobu opisu układów klasycznych, który (1) pozwoliłby pracować z lagranżjanami osobliwymi, (2) dopuszczałby włączenie do opisu różnego rodzaju więzów, (3) dawałby się zredukować ze względu na symetrie i jeszcze (4) dawałby się uogólnić na przypadek klasycznej teorii pola. Omówienie tego nowego sposobu w całości i zaprezentowanie jego własności (2), (3) i (4) oczywiście nie jest możliwe w trakcie jednego wykładu. Skupimy się zatem na przykładzie cząstki relatywistycznej (własność (1)). Zainteresowanych dogłębniejszym poznaniem tematu zapraszam na wykład monograficzny prof Pawła Urbańskiego w przyszłym semestrze.

Zacniemy od motywacji (czyli odrobina ideologii). Jak wspomnieliśmy poprzednim razem wariacyjne wyprowadzenie równań ruchu ma swoje źródło w statyce układów mechanicznych. Rozważamy tylko układy potencjalne, tzn takie dla których istnieje funkcja energii wewnętrznej  $U$ . Dla takich układów punktami równowagi są te punkty, dla których różniczka energii wewnętrznej znika. Nie zajmujemy się tu badaniem stabilności (czy to jest minimum, maksimum czy inny punkt krytyczny), gdyż stosujemy jedynie kryterium różniczkowe pierwszego rzędu. Traktując dynamikę jako „statykę krzywych” zastępujemy rozmaitość konfiguracyjną zbiorem krzywych, funkcję energii wewnętrznej  $U$  działaniem  $S$  a wektory styczne (w statyce przesunięcia wirtualne) infinitezymalnymi wariacjami krzywych. Oczywiście matematycznie sytuacja jest trudna, bo jeśli zbiór konfiguracji nie jest rozmaitością, to używanie metod różniczkowych wymaga uwagi i staranności. Takie podejście doprowadziło nas poprzednio do równości

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} S(\chi(s, \cdot)) = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta \chi^i(0, t) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \chi^i(0, t) \Big|_a^b \quad (1)$$

z której wywnioskowaliśmy, rozważając wariacje  $\delta \chi$  znikające na końcach, warunek

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0.$$

Gdybyśmy jednak przyglądali się dalej i użyli np. wariacji znikających tylko w jednym końcu okazałoby się, że znikać musi także  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  na końcach przedziału, co jest warunkiem zbyt restrykcyjnym. Przypomnijmy sobie, że  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i$  to zapisane we współrzędnych wartości odwzorowania Legendre’a. Warunek znikania pędów na końcach nie bardzo nam się podoba! Czy więc analogia statyczna działa tylko w pewnym zakresie? Na razie sytuację możemy uratować i to z pożytkiem dla całego obrazka.

Punkty krytyczne  $dU(q) = 0$  są punktami równowagi jedynie układu izolowanego, nie oddziałującego z innymi układami. Oddziaływać można przykładając do układu siłę zewnętrzną. W przypadku statycznym taka siła jest reprezentowana przez kowektor. Układ jest w równowadze w punkcie  $q$  z siłą  $\varphi$  jeśli  $dU(q) = \varphi$ . W mechanice, jak pokazuje wzór (1), „siła” zewnętrzna składa się z trzech części:  $(f, p_a, p_b)$ , gdzie  $f : \mathbb{R} \rightarrow T^*M$  jest krzywą w wiązce kostycznej, a  $p_a$  i  $p_b$  są elementami wiązki kostycznej zaczepionymi na początku i na końcu ruchu. Można powiedzieć, że  $f$  to coś w rodzaju sterowania (silniki raketowe itp.), które możemy włączać lub nie, natomiast  $p_a$  i  $p_b$  reprezentują oddziaływanie z przeszłością i przyszłością układu. Jest

to coś, czym nie możemy sterować bezpośrednio. Układ dynamiczny może więc być izolowany w tym sensie, że  $f = 0$ , ale nie ma sensu kłaść  $p_a = 0$  i  $p_b = 0$  w każdym przypadku. Analogia statyczna może więc działać, ale jeśli dopuścimy oddziaływanie zewnętrzne. Jak opisujemy układ statyczny z oddziaływaniem? Jednym ze sposobów jest podanie *zbioru stanowiącego*. Jest to zbiór tych sił (kovektorów), które są w równowadze z naszym układem w poszczególnych punktach. Łatwo stwierdzić, że dla układów potencjalnych ten zbiór to obraz  $dU: \mathcal{C} = dU(M)$ . W przypadku dynamicznym zbiór stanowiący trzeba jeszcze odpowiednio zinterpretować, żeby wydobyć z niego pożyteczne informacje. W dynamice działanie nie jest funkcją na rozmaitości, tylko funkcją na zbiorze z niejasną strukturą. Pojęcie różniczki takiej funkcji jest dość abstrakcyjne. Używając jednak wygodnych reprezentacji takich jak trójka  $(f, p_a, p_b)$  damy sobie jakoś radę. Przerwiemy teraz na chwilę część ideologiczno-fizyczną. Potrzebować będziemy bowiem pewnych matematycznych narzędzi. Oto dwie wstawki matematyczne:

**Izomorfizm Tulczyjewa.** Wróćmy na chwilę do odwzorowania  $\kappa_M : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M$ . Jest ono morfizmem podwójnych wiązek wektorowych, zamieniającym dwie struktury wektorowe  $\mathbb{T}M$  miejscami. W szczególności więc diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}M & \xrightarrow{\kappa_M} & \mathbb{T}M \\ \downarrow \tau_{\mathbb{T}M} & & \downarrow \mathbb{T}\tau_M \\ \mathbb{T}M & \xrightarrow{=} & \mathbb{T}M \end{array}$$

reprezentuje izomorfizm wiązek wektorowych. Co dostaniemy jako izomorfizm dualny? Powinno to być odwzorowanie między wiązkami dualnymi. Spróbujmy napisać stosowny diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^*\mathbb{T}M & \xleftarrow{\alpha_M} & \text{????} \\ \downarrow \pi_{\mathbb{T}M} & & \downarrow \\ \mathbb{T}M & \xrightarrow{=} & \mathbb{T}M \end{array}$$

Wiadomo co jest wiązką dualną do  $\tau_{\mathbb{T}M} : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M$  – oczywiście  $\pi_{\mathbb{T}M} : \mathbb{T}^*\mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M$ . Ale co jest wiązką dualną do  $\mathbb{T}\tau_M$ ? Okazuje się, że jest to wiązka  $\mathbb{T}\pi_M : \mathbb{T}\mathbb{T}^*M \rightarrow \mathbb{T}M$ . Żeby się o tym przekonać potrzebujemy ewaluacji między wektorami stycznymi do  $\mathbb{T}M$  a wektorami stycznymi do  $\mathbb{T}^*M$  mającymi jednakowe rzuty styczne na  $\mathbb{T}M$ . Niech więc  $\rho \in \mathbb{T}\mathbb{T}^*M$ ,  $v \in \mathbb{T}M$  spełniają warunek  $\mathbb{T}\pi_M(\rho) = \mathbb{T}\tau_M(v)$ . W takim przypadku istnieją krzywe  $t \mapsto p(t)$  i  $t \mapsto \delta q(t)$  reprezentujące  $\rho$  i  $v$  odpowiednio, takie, że  $\pi_M(p(t)) = \tau_M(\delta q(t))$  dla  $t$  z pewnego odcinka wokół zera. Można wtedy obliczyć ewaluację  $p(t)$  na  $\delta q(t)$  otrzymując funkcję rzeczywistą

$$t \mapsto \langle p(t), \delta q(t) \rangle$$

Pochodna tej funkcji w punkcie  $t = 0$  jest szukaną ewaluacją między  $\rho$  a  $v$ :

$$\langle \rho, v \rangle = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle p(\cdot), \delta q(\cdot) \rangle.$$

Jeśli  $\rho = (q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_l)$  oraz  $v = (q^i, \delta q^j, \dot{q}^k, \delta \dot{q}^l)$ , to jako krzywe można wziąć

$$t \mapsto (q^i + t\dot{q}^i, p_j + t\dot{p}_j), \quad t \mapsto (q^i + t\delta q^i, p_j + t\delta \dot{q}_j),$$

wtedy

$$\langle\langle \rho, v \rangle\rangle = \dot{p}_j \delta q^j + p_i \delta \dot{q}^i.$$

Na współrzędnych łatwo sprawdzić, że ewaluacja jest liniowa ze względu na właściwe struktury wiązek. Odpowiedni diagram można więc uzupełnić:

$$\begin{array}{ccc} T^*TM & \xleftarrow{\alpha_M} & TT^*M \\ \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow T\pi_M \\ TM & \xrightarrow{=} & TM \end{array}$$

Odwzorowanie  $\alpha_M$  dualne do  $\kappa_M$  jest także elementem struktury wiązek stycznej i kostycznej. Ma ono charakter kanoniczny. Odwzorowanie  $\alpha_M$  nosi nazwę *izomorfizmu Tulczyjewa*.

**Zadanie 1** *Postępując się definicją zapisać odwzorowanie  $\alpha_M$  we współrzędnych*

Powinno wyjść

$$\alpha_M(q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_j) = (q^i, \dot{q}^j, \dot{p}_k, p_l)$$

**Szczególne podprzestrzoności rozmaitości symplektycznej.** Rozważmy na razie parzysto-wymiarową przestrzeń wektorową  $V$  wyposażoną w niezdegenerowaną dwuformę  $\omega$ . Używać będziemy także odwzorowania  $\tilde{\omega} : V \rightarrow V^*$  indukowanego przez formę  $\omega$ . Warunek niezdegenerowania formy, można wypowiedzieć inaczej: forma jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy gdy  $\tilde{\omega}$  jest izomorfizmem. Niech  $W$  będzie podprzestrzenią wektorową w  $V$ . *Anihilatorem symplektycznym* podprzestrzeni  $W$  nazywamy podprzestrzeń  $W^\S \subset V$  zdefiniowaną jako

$$W^\S = \tilde{\omega}^{-1}(W^\circ),$$

gdzie  $W^\circ \subset V^*$  jest anihilatorem  $W$  w zwykłym sensie. Pojęcie anihilatora symplektycznego jest trochę podobne do pojęcia podprzestrzeni prostopadłej w przypadku przestrzeni wektorowych z iloczynem skalarnym. Na przykład zgadza się wymiar:

$$\dim W^\S = \dim V - \dim W.$$

Jednak z faktu, że pracujemy tym razem z formą antysymetryczną a nie symetryczną wynikają pewne różnice. W szczególności nie jest prawdą że przecięcie podprzestrzeni i jej anihilatora symplektycznego jest trywialne. W szczególności wśród wszystkich podprzestrzeni wektorowych w  $V$  wyróżnia się kilka typów: Podprzestrzeń  $W$  nazywamy *koizotropową* jeśli  $W^\S \subset W$ , podprzestrzeń  $W$  nazywamy *izotropową* jeśli  $W^\S \supset W$ . Zdarza się także, że  $W^\S = W$ , czyli podprzestrzeń jest koizotropowa i izotropowa równocześnie, wtedy mówimy o niej *lagranżowska*. Analizując wymiary stwierdzamy, że jeśli  $\dim V = 2n$  to podprzestrzeń koizotropowa ma zawsze wymiar przynajmniej  $n$ , podprzestrzeń izotropowa co najwyżej  $n$ . Lagranżowska oczywiście jest zawsze wymiaru  $n$ . Podprzestrzeń  $W$  nazywamy *symplektyczną*, jeśli forma obcięta do tej podprzestrzeni jest niezdegenerowana. Takie podprzestrzenie są zawsze parzystego wymiaru. Oczywiście jest wiele podprzestrzeni nie należących do żadnego z typów.

**Zadanie 2** W ramach ćwiczeń zmierzających do przyswajania sobie powyższych pojęć proszę ustalić bazę kanoniczną dla formy  $\omega$  i posługując się tą bazą podać kilka przykładów podprzestrzeni koizotropowych, izotropowych, lagranżowskich i symplektycznych. Proszę także znaleźć odpowiednie anihilatory symplektyczne.

Oczywiście jeśli  $W$  jest izotropowa, to  $W^\S$  jest koizotropowa. Każda więc koizotropowa podprzestrzeń zawiera wyróżnioną podprzestrzeń izotropową. Kolejnym łatwym ćwiczeniem może być wykazanie, że każda podprzestrzeń kowymiaru 1 jest koizotropowa. Z definicji przestrzeni izotropowej wynika, że forma  $\omega$  obcięta do takiej podprzestrzeni znika.

Powyższe definicje można przenieść na grunt geometrii różniczkowej. Jeśli  $(P, \omega)$  jest rozmaitością symplektyczną, to przestrzeń styczna  $\mathbb{T}_p P$  w każdym punkcie jest taka, jak omawiana powyżej przestrzeń wektorowa. Powiemy więc że podrozmaitość  $C \subset P$  jest koizotropowa, jeśli  $\mathbb{T}_p C \subset \mathbb{T}_p P$  jest koizotropowa w każdym punkcie  $p \in C$  w sensie opisanym powyżej. To samo dotyczy podrozmaitości izotropowych, lagranżowskich i symplektycznych. Niektóre spośród tych podrozmaitości mają ciekawą strukturę. Na przykład na każdej podrozmaitości koizotropowej  $C$  kowymiaru 1 istnieje kanoniczna dystrybucja  $\mathcal{D}$  składająca się z anihilatorów  $\mathbb{T}C$ , tzn  $\mathcal{D}_p = (\mathbb{T}_p C)^\S$ . Gładka dystrybucja jednowymiarowa jest zawsze całkowalna, zatem odprócz dystrybucji mamy też foliację  $C$  podrozmaitościami izotropowymi, które są podrozmaitościami całkowymi dystrybucji  $\mathcal{D}$ . Dystrybucję tę nazywamy *dystrybucją charakterystyczną* a foliację *foliacją charakterystyczną* podrozmaitości  $C$ .

Skoncentrujmy się na chwilę na podrozmaitościach lagranżowskich w wiązce kostycznej. Przede wszystkim parę przykładów:

1. Niech  $\varphi$  będzie zamkniętą formą na  $M$ , wówczas podrozmaitość  $\varphi(M) \subset \mathbb{T}^*M$  jest lagranżowska. Żeby się o tym przekonać sprawdźmy, czy forma symplektyczna  $\omega_M$  znika na wektorach stycznych do  $\varphi(M)$ . Każdy wektor styczny do  $\varphi(M)$  jest postaci  $w = \mathbb{T}\varphi(v)$ , gdzie  $v$  jest wektorem stycznym do  $M$ . Niech więc  $w_1 = \mathbb{T}\varphi(v_1)$ ,  $w_2 = \mathbb{T}\varphi(v_2)$

$$\begin{aligned} \omega_M(w_1, w_2) &= \omega_M(\mathbb{T}\varphi(v_1), \mathbb{T}\varphi(v_2)) = \varphi^* \omega_M(v_1, v_2) = \\ &= \varphi^* d\theta_M(v_1, v_2) = d\varphi^* \theta_M(v_1, v_2) = d\varphi(v_1, v_2) = 0 \end{aligned}$$

Podrozmaitość  $\varphi(M)$  jest więc izotropowa. Ze względu na wymiar musi być lagranżowska.

2. Każde włókno wiązki kostycznej jest podrozmaitością lagranżowską. W tym wypadku także pokażemy, że włókno jest izotropowe. Lagranżowskość wynika z wymiaru. Niech  $v$ ,  $w$  będą wektorami pionowymi zaczepionymi w punkcie  $p$  włókna  $\mathbb{T}_q^*M$ . Rozszerzmy  $v$  i  $w$  do pól wektorowych pionowych, odpowiednio  $V$  i  $W$ . Wtedy

$$\omega_M(V, W) = d\theta_M(V, W) = V\theta_M(W) - W\theta_M(V) - \theta_M([V, W]).$$

Wektory pionowe mają zerowy rzut styczny, dlatego pierwszy i drugi składnik znikają. W przypadku trzeciego składnika należy zauważyć dodatkowo, że nawias Liego pól pionowych jest polem pionowym.

3. Niech  $N$  będzie podrozmaitością w  $M$ , a  $f$  funkcją na  $N$ . Definiujemy zbiór

$$S_f = \{ p \in \mathbb{T}_C^*M : \forall v \in \mathbb{T}C \langle p, v \rangle = \langle df, v \rangle \}.$$

Wykazanie, że  $S_L$  jest podrozmaitością lagranżowską można potraktować jako ćwiczenie (nie zupełnie proste).

Podrozmaitość lagranżowską wiązki kostycznej, która jest obrazem różniczki funkcji  $f$  nazywamy *podrozmaitością generowaną przez  $f$* . Podrozmaitość taką jak w przykładzie (3) nazywamy *generowaną przez funkcję  $f$  na więzach  $N$* . W szczególnym przypadku, gdy  $f = 0$ , mówimy, że podrozmaitość jest generowana przez więzy. W takiej sytuacji  $S_L = (TC)^\circ$ . Istnieją bardziej skomplikowane niż funkcja i funkcja na więzach sposoby generowania podrozmaitości lagranżowskich.

**Zbiór stanowiący w dynamice.** Wróćmy teraz do opisu układu mechanicznego. Czym jest więc zbiór stanowiący dla dynamiki, tzn. jak można reprezentować różniczkę działania? Z poprzednich rozważań wynika, że zbiorem stanowiącym jest zbiór trójek  $(f, p_a, p_b)$  takich, że (we współrzędnych)

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = f^i(t), \quad (p_a)_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{t=a}, \quad (p_b)_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{t=b}.$$

Zauważmy także, że pędy na końcach krzywej są związane z prędkościami odwzorowaniem Legendre'a  $\lambda$ .

Możemy teraz oczywiście w zbiorze stanowiącym poszukać takich trójek  $(f, p_a, p_b)$  dla których  $f = 0$ . Wymaga to rozwiązania równania Eulera-Lagrange'a. Stosowne pędy znajdziemy wtedy używając odwzorowania Legendre'a. Możemy dostać nawet więcej – nie tylko pędy na końcach, ale także pędy wzdłuż całej krzywej będącej rozwiązaniem równania E-L. Zastanowimy się teraz, czy z rachunku wariacyjnego udałoby się znaleźć równanie różniczkowe opisujące takie krzywe w przestrzeni pędów bez konieczności rozwiązywania równania E-L? Okazuje się, że można to zrobić zamieniając skończony odcinek  $[a, b]$  parametru  $t$  na odcinek nieskończony, czyli ustaloną wartość  $t$  wraz z wektorem  $\partial_t$ . Jako przestrzeń konfiguracyjną otrzymujemy wtedy, zamiast kawałków krzywych, nieskończenie małe kawałki krzywych, czyli wektory styczne  $TM$ . Obliczanie działania (całki z lagranżjanu) polega wtedy na ewaluacji tego lagranżjanu w konkretnym punkcie konfiguracji. Przestrzeń konfiguracyjna jest teraz zwykłą rozmaitością, a działanie zwykłą funkcją. Zbiór stanowiący to zatem obraz różniczki lagranżjanu, czyli  $dL(TM)$ . Na pierwszy rzut oka nie dużo można się z niego dowiedzieć o samym układzie. Jednak jeśli użyjemy wygodnych reprezentantów, tzn sił i pędów otrzymamy coś ciekawego.

Rachunek (1) w wersji nieskońcześnie małej wygląda następująco:

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\dot{\chi}(s, t)) = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta \chi^i(0, t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \chi^i(0, t) \right)$$

Część czerwona to ewaluacja różniczki lagranżjanu w punkcie  $\dot{\chi}(0, t) = \dot{\gamma}(t)$  na wariacji prędkości, czyli na wektorze  $\delta \dot{\chi}(0, t)$ . Część czarna to rozkład tej różniczki na siłę zewnętrzną i pędy na końcach. Ponieważ jednak odcinek parametru jest nieskończenie mały, zamiast dwóch różnych pędów na końcach mamy... no właśnie, co? Zapiszmy powyższą równość w innej postaci:

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\dot{\chi}(s, t)) = f_i(t) \delta \chi^i(0, t) + \frac{d}{dt} (p_i(t) \delta \chi^i(0, t))$$

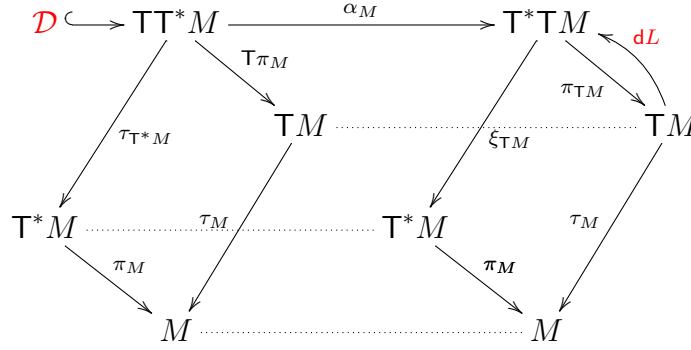
i spróbujmy z tej równości odgadnąć co reprezentuje różniczkę działania (lagranżjanu) w wersji nieskońcześnie małej. Założymy dla ułatwienia, że rozważamy jedynie układy izolowane w sensie dynamicznym, tzn. z siłą  $f = 0$ .

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\dot{\chi}(s, t)) = \frac{d}{dt} (p_i(t) \delta \chi^i(0, t))$$

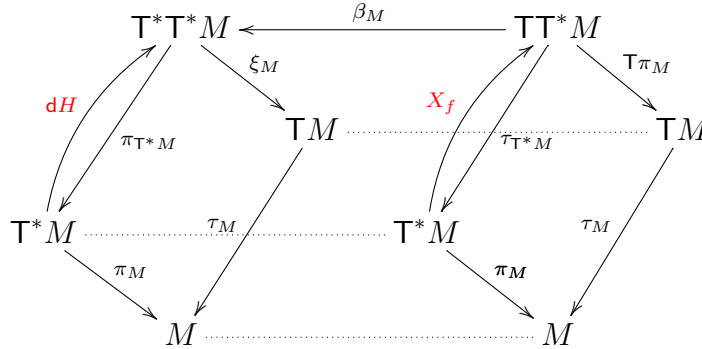
Po prawej stronie rozpoznają państwo zapewne ewaluację styczną między wektorem stycznym do pewnej krzywej w pędach a wektorem stycznym do krzywej  $t \mapsto \delta\chi(0, t)$ . Różniczka lagranżjanu reprezentowana jest więc przez wektor styczny do przestrzeni pędów, czyli element  $\mathbb{T}^*\mathbb{T}M$ . Wektory  $\delta\dot{\chi}$  i  $(\delta\chi)'$  są związane poprzez odwzorowanie  $\kappa_M$ , zatem  $dL$  i  $\dot{p}$  są związane poprzez odwzorowanie dualne do  $\kappa_M$ . Zbiór stanowiący, czyli obraz różniczki Lagranżjanu, można przetłumaczyć na podzbiór w  $\mathbb{T}^*\mathbb{T}M$ , który nazwać będziemy dynamiką. Dokładniej

$$\mathbb{T}^*\mathbb{T}M \supset \mathcal{D} = \alpha^{-1}(dL(\mathbb{T}M)).$$

Dynamika zawiera wektory styczne do krzywych w przestrzeni pędów układu, przy założeniu, że siła zewnętrzna jest równa zero. Dynamika jest więc równaniem różniczkowym pierwszego rzędu na krzywe fazowe. Równanie to nie musi jednak być obrazem pola wektorowego. Z całą pewnością jednak opisuje badany przez nas układ. Sprawdźmy teraz jaką dynamikę dostajemy w dwóch przypadkach - lagranżjanu mechanicznego, nierelatywistycznego, pochodzącego od metryki oraz lagranżjanu relatywistycznej cząstki swobodnej. Zanim rozpoczniemy rachunki narysujmy jeszcze jeden diagram:



i porównajmy go z diagramem odpowiednim dla opisu hamiltonowskiego.



**Dynamika cząstki nierelatywistycznej.** Wyliczymy teraz dynamikę dla nierelatywistycznej cząstki, dla której lagranżjan jest funkcją  $L(v) = \frac{m}{2}|v|^2 - V(q)$ , czyli we współrzędnych

$$L(q^i, \dot{q}^j) = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q^i).$$

Obraz różniczki lagranżjanu jest podrozmaitością w  $\mathbb{T}^*\mathbb{T}M$

$$dL(\mathbb{T}M) = \left\{ (q^i, \dot{q}^j, \varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \psi_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right\}.$$

Dynamika, czyli przeciwobraz  $dL(TM)$  względem odwzorowania  $\alpha_M$  to następująca podrozma-  
itość w  $TT^*M$

$$\mathcal{D} = \left\{ (q^i, p_j, \dot{q}^k, \dot{p}_l) : p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}, \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q^i} \right\}.$$

Korzystając z konkretnej postaci  $L$  możemy napisać,

$$p_i = mg_{ij}\dot{q}^j, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j}.$$

Pierwszą równość można odwrócić korzystając z niezdegenerowania  $g$ :

$$\frac{1}{m}g^{ij}p_i = \dot{q}^j$$

i wówczas widać, że  $\mathcal{D}$  jest obrazem pola wektorowego

$$X(q, p) = \frac{1}{m}g^{ij}p_i \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial p_k},$$

które rozpoznajemy jako pole hamiltonowskie funkcji

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}g^{ij}p_i p_j + V(q).$$

Na sposób lagranżowski i hamiltonowski otrzymujemy więc tę samą dynamikę. Można także  
podać przepis na odzyskanie równania Eulera-Lagrange'a. Oznaczmy to równanie literą  $\mathcal{E}$  i  
przypomnijmy sobie iż jest ono podzbiorem w  $T^2M$ . Przepis na  $\mathcal{E}$  jest następujący: podroz-  
maitość  $T\mathcal{D}$  zawarta jest w  $TT^*M$ . Należy ją przeciąć z  $T^2T^*M$  i wynik zrzutować na  $T^2M$ .  
Innymi słowy

$$\mathcal{E} = T^2\pi_M(T\mathcal{D} \cap T^2T^*M).$$

Łatwo sprawdzić przy pomocy współrzędnych, że wynik jest dobry.

**Swobodna cząstka relatywistyczna.** Korzystając z afinicznej struktury  $M$  otrzymujemy

$$TT^*M = M \times V^* \times V \times V^*, \quad T^*TM = M \times V \times V^* \times V^*,$$

i odwzorowanie  $\alpha_M$

$$\alpha_M(q, p, v, \dot{p}) = (q, v, \dot{p}, p).$$

Lagranżjan generuje podrozmaitość

$$\left\{ (q, v, 0, \frac{m}{|v|}\tilde{\eta}(v)) : q \in M, \eta(v, v) > 0 \right\}$$

Dynamika to

$$\mathcal{D} = \left\{ (q, \frac{m}{|v|}\tilde{\eta}(v), v, 0) : q \in M, \eta(v, v) > 0 \right\},$$

co można inaczej opisać

$$\mathcal{D} = \left\{ (q, p, v, \dot{p}) : |p|^2 = m^2, v = r\tilde{\eta}^{-1}(p), r > 0 \right\},$$

Tym razem  $D$  nie jest obrazem pola wektorowego. Rzut  $\mathcal{D}$  na  $T^*M$  jest jednokowymiarową podrozmainością zwaną *powłoką masy*. W każdym punkcie powłoki masy mamy pół dystrybucji jednowymiarowej. To, że jest jej pół, a nie cała, odzwierciedla orientację rozwiązań. Powłoka masy jest podrozmainością koizotropową a dynamika połową jej dystrybucji charakterystycznej. Krzywe w przestrzeni pędów mogą mieć dowolną parametryzację byle w przód w czasie dla cząstek i w tył dla antycząstek. Powłoka masy jest hiperboloidą dwupowłokową. Jedna z powłok dla cząstek a druga dla antycząstek.

Dynamika  $\mathcal{D}$  nie może być generowana przez zwykły hamiltonian, gdyż wtedy byłaby obrazem pola wektorowego. Gdyby dynamika była całą dystrybucją charakterystyczną byłaby generowana przez same więzy, czyli przez powłokę masy. Jednak orientacja komplikuje nieco sprawę i wymaga bardziej złożonego obiektu generującego. O tym jednak już innym razem. Równanie Eulera-Lagrange'a, które otrzymalibyśmy zgodnie z przedstawionym powyżej przepisem też jest bardzo sensowne. Korzystamy z identyfikacji  $T^2M = M \times V \times V$ :

$$\mathcal{E} = \{(q, v, a) : a = \rho v, \rho \in \mathbb{R}, \eta(v, v) > 0\}.$$