Analaliza I R

tydzień czternasty, 14.01.2013 – 20.01.2013

Zadanie 1. Zbadać zbieżność punktową, jednostajną (ew. niemal jednostajną) podanych ciągów funkcyjnych

$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}, \qquad f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2}, \qquad f_n(x) = x\frac{(n+1)x+n}{nx+1}, x \in [0, \infty[$$

Zadanie 2. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i dodatnia. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right) = \log f(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}dx\right)^n = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)dx\right),$$

przy czym pierwsza zbieżność jest jednostajna.

Zadanie 3. Czy poprawne są wyliczenia (uzasadnić)

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n} = s\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1+nx^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot 0^2}{1+n\cdot 0^2} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{(2+x)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$

Zadanie 4. Wykazać, że f jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}$ jeśli

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx^2+3}}{n^2}$$

Zadanie 5. Wykazać, że f jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $]0,\infty[$, ma asymptotę $y = x$ w ∞ oraz $f(0) = 0 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Wykazać także, że $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)^2}, \quad f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$$

Zadanie 6. Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)x^n}{(n+2)n!}$$

Wskazówka: badać $f(x) - e^x$.

Zadanie 7. Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n^2-1} x^{3n-5}$$

Wskazówka: $f(x) = \frac{1}{x^5}\varphi(x^3)$.

Zadanie 8. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{n(n+1)2^n}$$

Zadanie 9. Obliczyć sumę szeregu

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{-n}}{n(n+1)}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{2n+1}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{2n+1}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (16n^2-4n+1)a^n$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-5n-1}{2^n}$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15n^2-4n+1}{2^n}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$;

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$;

(l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(3n+2)}$;

(m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+2)}$.