Analiza II - 2013/14 zadania domowe ~~2~~ 4

Zadanie 1. W podanych całkach iterowanych zamienić kolejność całkowania:

$$a)\ \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^0 dy\, f(x,y), \ \text{ na } \int dy \int dx\, f(x,y);$$

$$b)\ \int_0^1 dy \int_{1-y}^{1-\frac{y}{2}} dx \int_0^{x+y-1} dz\, f(x,y,z) \ + \ \int_1^2 dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} dx \int_0^{x+y-1} dz\, f(x,y,z),$$

$$\text{na } \int dz \int dy \int dx\, f(x,y);$$

Zadanie 2. Obliczyć całki:

$a)$ $\displaystyle\int\int_\Omega dx\,dy$, gdzie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ jest ograniczona krzywymi: $x = y^2$, $y + 1 = x^2 - 4x + 4$;

$b)$ $\displaystyle\int\int_\Omega (x^2+y^2)^2 dx\,dy$, gdzie $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant x\}$;

$c)$ $\displaystyle\int\int\int_\Omega dx\,dy\,dz$, gdzie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ jest ograniczony powierzchnią: $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$ $(a > 0)$;

$d)$ $\displaystyle\int\int\int_\Omega \frac{1}{x^4+y^2} dx\,dy\,dz$ gdzie $\Omega := \{(x,y,z) \in R^3 :\ y \geqslant x^2+1,\ 0 \leqslant z \leqslant 4\}$;

$e)$ $\displaystyle\int\int\int_\Omega (x^2+y^2) dx\,dy\,dz$ gdzie $\Omega := \{(x,y,z) \in R^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z,\ x^2+y^2 \geqslant (z-1)^2,\ z \geqslant 1\}$.

Zadanie 3. Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[,+\infty[$. Wykazać, że :

a) jeśli f jest całkowalna na $[0,+\infty[$, to istnieje granica $\displaystyle\lim_{a \mapsto 0+} \int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

b) jeśli $|f|$ jest całkowalna na $[0,+\infty[$, to istnieje granica $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$.

Zadanie 4. Wykazać istnienie całek i metoda rózniczkowania po parametrze obliczyć je:

$$a)\ b)\ \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}(ax)}{x(1+x^2)}\,dx,\ a \in \mathbb{R};$$

$$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\right)\frac{dx}{\sin x}, \quad |a| < 1;$$

$$c)\ \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx, \quad a > -1;$$

Zadanie 5. Znaleźć rezolwentę oraz szczególne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego:

a) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$

b) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

c) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$

d) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

e) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

Zadanie 6. Podać jakieś szczególne rozwiazanie rownania:

a) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{bmatrix};$

b) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t\sin t \\ 0 \end{bmatrix};$

c) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}.$

Zadanie 7. Znaleźć wszystkie funkcje f, ciagłe na $\mathbb{R}$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniające warunek:

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 2x + \int_0^x f(t)\,dt.$$