

Matematyka III

Zadania domowe, Analiza zespolona

Zadanie 1 Rozłóż w szereg Laurenta wokół $z_0 = 1$ funkcję $\frac{1}{z^2+4}$ w następujących obszarach

1. kole $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$
2. pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 1| < 2\}$
3. zewnątrz koła $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 1|\}$

Wskazówka: rozłóż funkcję na ułamki proste nad \mathbb{C} .

Zadanie 2 Oblicz residuum w każdym punkcie płaszczyzny zespolonej \mathbb{C} następujących funkcji

1. $\frac{e^z}{(z-1)^4}$
2. $\frac{z^2+1}{z^2+z+1}$
3. $\frac{\sin z^2}{z^7}$

Zadanie 3 Oblicz

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(7x)}{x^2 + x + 1} dx$

Wskazówka: $|R^2 e^{2i\phi} + R e^{i\phi} + 1| = |R e^{i\phi} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i| |R e^{i\phi} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i| \geq |R - 1|^2$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(7x)}{(x^2 + 4)^2} dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(7x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/7}}{1 + e^x + e^{2x}} dx$

Zadanie 4 Całkując funkcję $\frac{e^z}{z^{n+1}}$ wzdłuż okręgu o promieniu 1 i środku w 0 wykaż, że

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \phi} \cos(n\phi - \sin \phi) d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

Zadanie 5 * Oblicz

1. $\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$

2. $\int_0^1 \sqrt[3]{x(1-x)^2} dx$