Praca domowa

12 listopada 2012

Zadanie 1
Macierze Pauliego zadane są następująco:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Są to macierze hermitowskie. Pokazać, że:

1. $\boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k = \delta_{jk} \boldsymbol{\sigma}_0 + i\epsilon_{jkl} \boldsymbol{\sigma}_l$
2. $Tr\{\boldsymbol{\sigma}_i\} = 0; Tr\{\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}; Tr\{\boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_l\} = 2i\epsilon_{jkl}$
3. $\boldsymbol{\sigma}_i^{-1} = \boldsymbol{\sigma}_i$

(gdzie indeksy przy macierzach przyjmują wartości x,y,z)
Zadanie 2
Niech $\mathbb{A} = a_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + a_j \boldsymbol{\sigma}_j$ i $\mathbb{B} = b_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + b_j \boldsymbol{\sigma}_j$. Pokazać, żę **AB** ma postać **AB** $= c_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + c_i \boldsymbol{\sigma}_i$. Jakie muszą być współczynniki a_0, a_i, aby macierz $\mathbb{A}$ była

- hermitowska
- unitarna
- unimodularna ($det\mathbb{A} = +1$)

Zadanie 3
Niech V będzie przestrzenią wektorową macierzy 2x2 o współczynnikach zepolonych. Rozważmy odwzorowanie

$$T:\ V \longrightarrow V,\ \ T(A) = \boldsymbol{\sigma}_1 A \boldsymbol{\sigma}_1 - A^T.$$

Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie standardowej oraz bazie złożonej z macierzy Pauliego. Znaleźć jądro oraz obraz tego odwzorowania.

Zadanie 4
W zalezności od wartości parametru p zbadać liniową niezależność trójki wektorów:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+2p \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} p \\ 5 \\ 3+p \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10+p \\ -13 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5
w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określmy operator

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczyć P^2, znaleźć jego jądro i obraz.

Zadanie 6
Niech V oznacza przestrzeń wektorową macierzy 2x2 o rzeczywistych wyrazach macierzowych, niech także

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdefiniujmy odworowanie liniowe $F : V \to V$ wzorem

$$F(\mathbb{X}) = \mathbb{A}^T \mathbb{X} \mathbb{A} - 10\mathbb{X}^T$$

Znaleźć jądro, obraz i rząd odworowania F. Znaleźć takie bazy f i e w przestrzeni V, że $[F]^e_f$ ma postać kanoniczną, tzn. jest macierzą diagonalną mającą na diagonai tyle jedynek ile wynosi rząd F i pozostałe wyrazy diagonalne równe zero.

Zadanie 7
Obliczyć $\mathbb{U}(\phi) = \exp\{i\phi\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\}$, gdzie $\boldsymbol{n} = [n_x, n_y, n_z]$ jest wektorem o długości jednostkowej ($\boldsymbol{n}^2 = 1$), $\phi \in \mathbb{R}$, a $\boldsymbol{\sigma}_i$ to macierze Pauliego. Sprawdzić, że $\mathbb{U}(\phi)$ jest macierzą unitarną.