

- Obliczyć pole obszaru $K \subset \mathbb{R}^2$: (a) ograniczonego cykloidalą $(x, y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, i prostą $y = 0$; (b) ograniczonego krzywą $(x, y) = (\sin 2\varphi, \sin 3\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; (c) $K = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq a(x^3 - 3xy^2)\}$; (d) $K = \{(x, y) : ax^2 - bxy + cy^4 \leq 0; x, y \geq 0\}$; (e) $K = \{(x, y) : ax^3 - bx^2y + cy^4 \leq 0; x, y \geq 0\}$ ($a, b, c > 0$).
- Obliczyć całki: (a) $\int_L e^x((1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy)$, gdzie L jest brzegiem obszaru $\{0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$; (b) $\int_L(\vec{A}d\vec{l})$, jeśli $\vec{A} = xz[6z - 3xy, 2x, 3x]$, a L jest brzegiem powierzchni $S = \{z = xy, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 1\}$ zorientowanym "do góry"; (c) $\int_S(\vec{A}d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = \frac{[x, y, z]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $S = \{\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x^2 + y^2 + z^2 \geq b^2, z \geq 0\}$ oraz $0 < a < b < c$ są zadane; (d) $\int_S(\vec{A}d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = [xz, x^2y, y^2z]$, a $S = \partial\{0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1; x, y \geq 0\}$; (e) $\int_S(\vec{A}d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = z[e^x \sin y, e^x \cos y, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}]$, a $S = S_1 \cup S_2$ składa się z dwóch półsfery, zawartych w brzegu bryły $\{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0\}$. W punktach (a), (c), (d) i (e) przyjmujemy orientację zewnętrzną brzegu.
- Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią zawartą w sferze $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, a $\omega := \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. Dowieść, że przy stosownej orientacji S wartość $\frac{1}{3} \int_S \omega$ jest objętością bryły $[0, 1]S := \{r\vec{p} : r \in [0, 1], \vec{p} \in S\} \subset \mathbb{R}^3$.
- (a) Niech $\mathcal{O} := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O})$, $d\theta = 0$ oraz $\int_{x_1^2 + x_2^2 = 1} \theta = 0$, to θ jest formą zupełną. (b) Niech $\mathcal{O}_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_3$; wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O}_0)$, $d\theta = 0$ i $\int_{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0} \theta = 0$, to θ jest formą zupełną.
- Niech $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} \subset \mathcal{O} := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dowieść, że jeśli $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O})$, $d\omega = 0$ i $\int_S \omega = 0$, to ω jest zupełna. *Wskazówka.* Wykorzystać ściągłość zbiorów $\mathcal{O}_+ = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_-)e_3$, $\mathcal{O}_- = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+)e_3$ oraz wynik zadania 4(b).
- Niech $\mathcal{O} := \mathbb{R}^n \setminus 0$ oraz $\omega := \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} x_r dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_r} \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^{n-1}(\mathcal{O})$. (a) Wyprowadzić tożsamość $\omega = x_1^n d(\frac{x_2}{x_1}) \wedge \dots \wedge d(\frac{x_n}{x_1})$. (b) Dowieść, że $d(f \cdot \omega) = 0 \iff (f \text{ jest dodatnio jednorodna stopnia } -n)$. (c) Znaleźć formę pierwotną dla $f \cdot \omega$ na $\mathcal{O}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$, jeśli $f(x) = x_1^{-n} g(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1})$ dla $x \in \mathcal{O}^+$.
- Obliczyć $\theta := \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \phi^* \omega) dt$, sprawdzić że $d\theta = \omega$, jeżeli $\omega := z^{-3}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \in \Omega^2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} := \{(x, y, z) : z > 0\}$ oraz $\phi : [0, 1] \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ dane jest wzorem: (a) $\phi(t, x, y, z) := (tx, ty, 1 - t + tz)$; (b) $\phi(t, x, y, z) := (tx, ty, z^t)$.
- Niech \vec{R} będzie radialnym polem wektorowym na $\mathcal{O} := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, tzn. $\vec{R}(x) := \vec{x}$. Sprawdzić, że jeśli pole wektorowe \vec{A} na \mathcal{O} jest dodatnio jednorodne stopnia $\alpha \in \mathbb{R}$, tzn. $\vec{A}(tx) = t^\alpha \vec{A}(x)$ dla $x \in \mathcal{O}$ oraz $t > 0$, to zachodzą wzory: $(\alpha + 1)\vec{A} = \text{grad}(\vec{A} \lrcorner \vec{R}) + (\text{rot} \vec{A}) \times \vec{R}$, $(\alpha + 2)\vec{A} = \text{rot}(\vec{A} \times \vec{R}) + (\text{div} \vec{A})\vec{R}$.
W konsekwencji \vec{A} ma na \mathcal{O} potencjał skalarny (wektorowy), jeśli $\text{rot} \vec{A} = 0$ i $\alpha \neq -1$ (jeśli $\text{div} \vec{A} = 0$ i $\alpha \neq -2$).
- Niech R będzie radialnym polem wektorowym na $\mathcal{O} := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tzn. $R(x) = x$. Dowieść, że jeśli $\omega \in \Omega^k(\mathcal{O})$ spełnia warunek $\omega(tx) = t^\alpha \omega(x)$ dla $x \in \mathcal{O}$, $t > 0$, tzn. współczynniki ω są funkcjami dodatnio jednorodnymi stopnia α , to $(\alpha + k)\omega = d(R \lrcorner \omega) + R \lrcorner d\omega$. Sprawdzić, że stanowi to uogólnienie wyniku poprzedniego zadania.
- Stosując tw. Stokesa dowieść, że jeśli u i v są funkcjami gładkimi na otoczeniu zwartej obszaru $K \subset \mathbb{R}^2$, to zachodzą następujące tożsamości Greena: $\int_K (u \Delta v + (\nabla v \lrcorner \nabla u)) dx dy = \int_{\partial K} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} ds := \int_{\partial K} u (\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx)$, $\int_K (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\partial K} (u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}) ds$, $\int_K \Delta u dx dy = \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$. Wyjaśnić sens tradycyjnego symbolu $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$.
- Wyprowadzić wzory: $\int_L(\vec{A}d\vec{l}) = \int_L(\vec{A} \lrcorner \mathbf{t}) ds_1$, $\int_S(\vec{A}d\vec{\sigma}) = \int_S(\vec{A} \lrcorner \mathbf{n}) ds_2$, wyrażające całki z form różniczkowych w \mathbb{R}^3 po krzywych ($\dim L = 1$) i powierzchniach ($\dim S = 2$) przez całki krzywoliniowe i powierzchniowe; \mathbf{t} oznacza pole wersorów stycznych na L , a \mathbf{n} — pole wersorów normalnych na S ; orientacje L i S określone są przez \mathbf{t} i \mathbf{n} .
- Obliczyć całki $\int_S f ds_2$ i $\int_S \frac{1}{f} ds_2$, jeśli S jest stożkiem $\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2, z \in [0, c]\}$, a $f := \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2}$.
- Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (otwarty), $f \in \Omega^0(\mathcal{O})$; oznaczmy $f'_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) := \|x\|$. Dowieść, że: (a) Jeśli f znika na brzegu zwartej obszaru $K \subset \mathcal{O}$, to $\int_K r^{-3}(x_1 f'_{,1} + x_2 f'_{,2} + x_3 f'_{,3}) d^3x = 0$; (b) Jeśli f znika na brzegu zwartej powierzchni $S \subset \mathcal{O}$, a $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest polem jednostkowych wektorów normalnych na S , to $\int_S \frac{1}{r} \begin{vmatrix} f'_{,1} & x_1 & \mathbf{n}_1 \\ f'_{,2} & x_2 & \mathbf{n}_2 \\ f'_{,3} & x_3 & \mathbf{n}_3 \end{vmatrix} ds_2 = 0$.

18. Na \mathbb{R}^3 dane są trzy pola wektorowe:

$$X = \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial x} + (xy - z) \frac{\partial}{\partial y} + (xz + y) \frac{\partial}{\partial z}$$

$$Y = (xy + z) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(1 - x^2 + y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + (yz - x) \frac{\partial}{\partial z}$$

$$Z = (xz - y) \frac{\partial}{\partial x} + (yz + x) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

(a) Sprawdzić, że w każdym punkcie $p = (x, y, z)$ wartości $(X(p), Y(p), Z(p))$ tworzą bazę ortogonalną w przestrzeni stycznej $T_p\mathbb{R}^3$;

(b) Obliczyć $[X, Y], [Y, Z], [Z, X]$ i wyrazić wynik w bazie (X, Y, Z) .

(c) Niech $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ i niech $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ oznacza odwzorowanie

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

Wykazać, że φ jest dyfeomorfizmem i obliczyć $T\varphi(X), T\varphi(Y), T\varphi(Z)$.

19. Niech M będzie macierzą 3×3 o współczynnikach rzeczywistych, niech także $r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Definiujemy pole wektorowe na \mathbb{R}^3 wzorem

$$F(r) = Mr.$$

Jakie warunki musi spełniać M aby pole to miało (a) potencjał wektorowy, (b) potencjał skalarny? Znaleźć, jeśli istnieją potencjały, dla

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

20. Niech $\mathcal{O} = \{(x, y, z) : z > 0\}$. Obliczyć

$$\theta = \int_0^1 \left(i \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi^* \omega \right) dt$$

i sprawdzić, że $d\theta = \omega$ dla

$$\omega = \frac{1}{z^3} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \quad \text{dla } z > 0$$

$$\varphi : [0, 1] \times \mathcal{O} \ni (t, x, y, z) \mapsto (tx, ty, z^t)$$

21. Obliczyć strumień pola $A = y \frac{\partial}{\partial x} + z^2 \frac{\partial}{\partial y} + x^2 \frac{\partial}{\partial z}$ przez powierzchnię $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1, z \in [1, 2]\}$ zorientowaną na zewnątrz.

22. Niech $\omega = x dy + y dz + z dx$ będzie jednoformą na \mathbb{R}^3 . Udowodnić, że jeśli funkcja gładka $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $d(f\omega) = 0$ to $f = 0$.

23. Obliczyć całkę z formy różniczkowej

$$\omega = x^3 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z dx \wedge dy$$

po powierzchni bocznej bryły obrotowej

$$B = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 3, x^2 + y^2 + 1 \leq z^2\}$$

zorientowanej jak w twierdzeniu Stokesa.

24. Wyrazić dywergencję pola wektorowego we współrzędnych parabolicznych w \mathbb{R}^3 (ξ, η, φ) .

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi$$

$$y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi$$

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

1. (a) $|K| = 3\pi$; (b) $|K| = \frac{12}{5}$; (c) $|K| = \frac{\pi}{4}a^2$ (parametryzować kątem φ); (d) $\frac{1}{60}a^{-3}b^5c^{-2}$; (e) $|K| = \frac{1}{210}a^{-5}b^7c^{-2}$.
2. Zastosować twierdzenie Stokesa. Odp. (a) $I = -\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$; (b) $\frac{4}{5}$; (c) $2\pi \left(1 - \frac{c}{b} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}\right)$; (d) $\frac{\pi}{8}$; (e) $\frac{3}{2}\pi$.
3. $r^2 dr \wedge \omega = dx \wedge dy \wedge dz$, więc sprowadzając całkę wielokrotną do całki iterowanej mamy $|[0, 1]S| = \int_{[0, 1]S} r^2 dr \wedge \omega = \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_S \omega$.
4. (a) Ściągalność zbiorów $\mathcal{O}_\pm := \mathcal{O} \setminus (\mathbb{R}_\mp) e_2$ daje $\exists f_\pm \in \Omega^0(\mathcal{O}_\pm) : \theta = df_\pm$ na \mathcal{O}_\pm ; różnica $f := f_+ - f_-$ jest stała na obu spójnych składowych $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, tzn. na półpłaszczyznach $\{x_1 > 0\}$ i $\{x_1 < 0\}$. Dzieląc γ na dwa łuki o końcach $p = (1, 0)$ i $q = (-1, 0)$ dostajemy $0 = \int_\gamma \theta = (f_+(q) - f_+(p)) + (f_-(p) - f_-(q)) = f(q) - f(p)$, więc obie stałe są równe: $f_+ = f_- + c$. Stąd f_+ ma przedłużenie do gładkiej funkcji na \mathcal{O} , której różniczką jest θ . (b) Dowód identyczny; jako \mathcal{O}_\pm bierzemy dopełnienia stosownych półpłaszczyzn w \mathbb{R}^3 .
5. (ściągalność \mathcal{O}_\pm) $\Rightarrow \exists \theta_\pm \in \Omega^1(\mathcal{O}_\pm) : \omega = d\theta_\pm$ na \mathcal{O}_\pm . Niech S_\pm będą górną i dolną półsferą, zaś γ — okręgiem $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, stanowiącym wspólny brzeg S_\pm . Z tw. Stokesa $0 = \int_S \omega = \int_{S_+} d\theta_+ + \int_{S_-} d\theta_- = \int_\gamma \theta_+ - \int_\gamma \theta_- = \int_\gamma (\theta_+ - \theta_-)$; zarazem $\theta_0 := \theta_+ - \theta_-$ na $\mathcal{O}_0 := \mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$ jest zamknięta (bo $d\theta_\pm = \omega$), więc $\exists f \in \Omega^0(\mathcal{O}_0) : df = \theta_+ - \theta_-$ na \mathcal{O}_0 (zadanie 4(b)). Przedstawmy f w postaci $f = f_+ - f_-$, $f_\pm \in \Omega^0(\mathcal{O}_\pm)$, np. biorąc $f_+ = h\left(\frac{x_3}{\|x\|}\right) \cdot f$, gdzie $h \in \Omega^0(\mathbb{R})$ jest taka, że $h(t) = \begin{cases} 1, & t < -1/2 \\ 0, & t > 1/2 \end{cases}$. Wtedy $\theta_\pm - df_\pm \in \Omega^1(\mathcal{O}_\pm)$ oraz $\theta_+ - df_+ = \theta_- - df_-$ na $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, więc $\theta_\pm - df_\pm$ sklejają się do jednej gładkiej formy θ na $\mathcal{O} = \mathcal{O}_+ \cup \mathcal{O}_-$; jest jasne, że $d\theta = \omega$.
9. (a) $\phi^* \omega = (1-t+tz)^3 [t^2(x dy - y dx) \wedge (t dz + (z-1)dt) + (1-t+tz)(t^2 dx \wedge dy + tx dt \wedge dy + ty dx \wedge dt)]$, więc $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \phi^* \omega = \frac{t}{(1-t+tz)^3} (x dy - y dx)$; skoro $\int_0^1 \frac{t}{(1-t+tz)^3} = \left| \frac{u=1-t+tz}{t=(u-1)/(z-1)} \right| = \frac{1}{(z-1)^2} \int_1^z \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3} \right) du = \frac{1}{2z^2}$, to $\theta = \frac{1}{2z^2} (x dy - y dx)$.
- (b) $\phi^* \omega = z^{-2t} t (t \log z - 1) dt \wedge (y dx - x dy) + z^{-2t} t^2 dx \wedge dy + z^{-2z-1} t^3 (x dy - y dx) \wedge dz$, więc $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \phi^* \omega = z^{-2t} t (t \log z - 1) (y dx - x dy)$; skoro $\int_0^1 z^{-2t} t (t \log z - 1) dt = \left| \frac{u=t \log z}{z} \right| = \log^{-2} z \int_0^{\log z} u(u-1)e^{-2u} du = -\frac{1}{2} \log^{-2} z [u^2 e^{-2u}]_0^{\log z} = -\frac{1}{2} z^{-2}$, to $\theta = \frac{x dy - y dx}{2z^2}$.
10. (a) Np. $\theta := \frac{1}{2}(\omega + S^* \omega)$, gdzie $\omega := \frac{z dx - (x-1) dz}{(x-1)^2 + z^2}$; niezupełność θ wynika stąd, że $\int_\gamma \theta \neq 0$, gdy γ jest małym okręgiem wokół $(1, 0)$.
- (b) Można wziąć np. $\hat{\theta} := \phi^* \theta$, gdzie $\phi : \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$, $\phi(x, y, z) := (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$; wtedy oczywiście $d\hat{\theta} = \phi^*(d\theta) = 0$, lecz $\hat{\theta}$ nie jest zupełna (bo $\neq 0$ jest całka z $\hat{\theta}$ po okręgu $\{(x-1)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$). Warunek $S^* \theta = \theta$ sprawia, że $\hat{\theta}$ jest gładka na $\hat{\mathcal{O}}$, nie tylko poza osią $0z$, na której ϕ nie jest gładkie. W istocie łatwo policzyć, że $\theta = \frac{2xz dx + (-x^2 + z^2 + 1) dz}{(x^2 + z^2 + 1)^2 - 4x^2}$, a więc $\hat{\theta} = \frac{2z(x dx + y dy) + (-x^2 - y^2 + z^2 + 1) dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 4(x^2 + y^2)} \in \Omega^1(\hat{\mathcal{O}})$.
11. Oznaczmy $\text{vol} := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$; przedstawmy $\sigma \in \Omega^{n-1}(\mathcal{O})$ w postaci $\sigma = \sigma_A := A \lrcorner \text{vol}$, gdzie $A : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest polem wektorowym na \mathcal{O} . Skoro $F^* \text{vol} = \det F \cdot \text{vol}$ (z definicji wyznacznika), to $F^* \sigma_A = \det F \cdot \sigma_{F^* A}$ dla $F \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, $\det F \neq 0$, gdzie $F^* A$ jest nowym polem wektorowym ("cofnięciem pola A przez F "), danym wzorem $F^* A = F^{-1} \circ A \circ F$. Tak więc σ_A jest obrotowo niezmiennicza \iff pole A jest obrotowo niezmiennicze, tzn. $F^* A = A$, tzn. $\forall F : F \circ A = A \circ F$. Ustalmy $x \in \mathcal{O}$ i weźmy $y := Ax$; mamy wtedy $Fy = y$ dla wszystkich obrotów F , takich że $Fx = x$; wynika stąd, że prostopadła do x składowa y jest $=0$ (gdyż 0 jest jedynym obrotowo niezmienniczym wektorem w przestrzeni $\langle x \rangle^\perp$), więc $y \parallel x$. Zatem obrotowo niezmiennicze pole musi mieć postać $A(x) = h(x)x$ dla pewnej $h \in \Omega^0(\mathcal{O})$; wtedy $F^* A = A$ oznacza $\forall F$ (obrot) : $h(Fx) = h(x)$, skąd $h(x)$ jest funkcją od $\|x\|$, co daje (a). Łatwo sprawdzić, że $J_x^* \omega = \omega$, $d\omega = 0$ oraz $dr \wedge \omega = r^{1-n} \text{vol}$ (gdzie $r(x) := \|x\|$), skąd natychmiast wynika (b).
13. Niech $\theta := R \lrcorner \omega$, tzn. $\theta(x) = x \lrcorner \omega(x)$ dla $x \in \mathcal{O}$; różniczkując tę zależność otrzymujemy $\theta'(x)v = x \lrcorner (\omega'(x)v) + v \lrcorner \omega(x)$ dla $v \in \mathbb{R}^n$; stąd $d\theta(x)(v_1, \dots, v_r) = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} (\theta'(x)v_r)(v_1, \dots, \widehat{v_r}, \dots, v_k) = \sum_{r=1}^k [(\omega'(x)v_r)(x, v_1, \dots, \widehat{v_r}, \dots, v_k) + \omega(x)(v_r, v_1, \dots, \widehat{v_r}, \dots, v_k)] = k \cdot \omega(x)(v_1, \dots, v_k) + \sum_{r=1}^k (\omega'(x)v_r)(x, v_1, \dots, \widehat{v_r}, \dots, v_k)$. Z kolei biorąc $v_0 := x$ mamy: $(R \lrcorner d\omega)(x)(v_1, \dots, v_r) = d\omega(x)(v_0, \dots, v_r) = \sum_{r=0}^k (-1)^r (\omega'(x)v_r)(v_0, \dots, \widehat{v_r}, \dots, v_k) = (\omega'(x)x)(v_1, \dots, v_r) + \sum_{r=1}^k (-1)^r (\omega'(x)v_r)(x, v_1, \dots, \widehat{v_r}, \dots, v_k)$. Dodając stronami te dwie równości i korzystając z równania Eulera $\omega'(x)x = \alpha \cdot \omega(x)$ (jednorodność stopnia α) dostajemy tezę. (Symbol $\widehat{}$ oznacza pominięcie.)
- Inny sposób. Niech $(x^i)_{i=1}^n$ — standardowe współrzędne na \mathbb{R}^n , $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ oraz $\omega_{i_1 \dots i_k} := \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k})$ — współczynniki ω . Wtedy $(d\omega)_{i_0 i_1 \dots i_k} = \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_k} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \partial_{i_r} \omega_{i_0 \dots \widehat{i_r} \dots i_k}$, co wraz z równaniem Eulera $\sum_i x^i \partial_i \omega_{i_1 \dots i_k} = \alpha \cdot \omega_{i_1 \dots i_k}$ daje $(R \lrcorner (d\omega))_{i_1 \dots i_k} = \sum_i x^i (d\omega)_{i i_1 \dots i_k} = \alpha \cdot \omega_{i_1 \dots i_k} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \sum_i x^i \partial_{i_r} \omega_{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_k}$. Z kolei dla $\theta := R \lrcorner \omega$ mamy $\theta_{i_1 \dots i_k} = \sum_i x^i \omega_{i i_1 \dots i_k}$, więc $(d\theta)_{i_1 \dots i_k} = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \partial_{i_r} \theta_{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_k} = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \sum_i \partial_{i_r} (x^i \omega_{i i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_k}) = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \sum_i [x^i \partial_{i_r} \omega_{i i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_k} + \omega_{i i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_k}]$. Dodając to do poprzedniej równości dostajemy $(R \lrcorner d\omega + d(R \lrcorner \omega))_{i_1 \dots i_k} = (\alpha + k) \omega_{i_1 \dots i_k}$.
15. Ad \int_L : Jeśli ϕ jest parametryzacją krzywej L , to $t \circ \phi = \|\phi'\|^{-1} \phi'$, $\phi^* ds_1 = \|\phi'\|$, więc $\phi^* ((\vec{A}|t) ds_1) = (\vec{A} \circ \phi(u) | \phi'(u)) | du|$, natomiast $\phi^* (\vec{A} d\vec{l}) = \sum_{i=1}^3 A_i \circ \phi(u) \frac{d\phi_i}{du} du = (\vec{A} \circ \phi(u) | \phi'(u)) du$, skąd teza. Ad \int_S : Jeśli ϕ jest parametryzacją powierzchni S , to $\phi^* ds_2 = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right\| =: \kappa$, zaś $\mathbf{n} \circ \phi = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)$, więc $\phi^* ((\vec{A}|\mathbf{n}) ds_2) = (\vec{A} \circ \phi(u) | \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \phi}{\partial u_2}) | du_1 \wedge du_2 |$, zaś $\phi^* (\vec{A} d\vec{\sigma}) = (A_1 \circ \phi(u) \frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u_1, u_2)} + \dots) du_1 \wedge du_2 = (\vec{A} \circ \phi(u) | \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \phi}{\partial u_2}) du_1 \wedge du_2$, skąd teza.
16. $\phi(z, \varphi) := (az \cos \varphi, bz \sin \varphi, z)$, wtedy $\phi^* ds_2 = z \sqrt{a^2 b^2 + a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} |dz \wedge d\varphi|$. Odp. $I_1 = \frac{\pi(a^2 + 2a^2 b^2 + b^2)c^3}{3ab}$, $I_2 = 2\pi abc$.