ALGEBRA R 11

ALGEBRA, WYKŁAD 10 POWTÓRZENIOWY

ZADANIE 2 Niech $V=\mathbb{K}^3$, $\phi^k \in V^*$ $\phi^k(x^1,x^2,x^3) = x^1+x^2+x^3-2k\,x^k$. Wykazać że układ $\phi=(\phi^1,\phi^2,\phi^3)$ stanowi bazę V^*. Znaleźć macierz operatora $F^* \in \mathrm{End}(V^*)$ w bazie ϕ jeśli

$$F\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^1 \end{bmatrix}$$

ROZWIĄZANIE Zapisujemy ϕ^k w bazie kanonicznej jako odwzorowanie $\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$, czyli jako wektory wierszowe

$$\phi^1 = [-1 \ \ 1 \ \ 1] \qquad \phi^2 = [1 \ \ -3 \ \ 1] \qquad \phi^3 = [1 \ \ 1 \ \ -5]$$

Jest ich trzy, zatem sprawdzenie czy są bazą V^* sprowadza się do sprawdzenie liniowej niezależności układu (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3). W tym celu zapisujemy te wektory (wiersze) w macierzy i redukujemy wierszowo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \overset{w}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \overset{w}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{w}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{w}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierz, której wierszami są ϕ^k jest wierszowo równoważna macierzy jednostkowej, zatem ma rząd 3. Oznacza to, że wiersze są liniowo niezależne. Układ (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) jest zatem bazą V^*.

Macierz $[F^*]^{\phi}_{\phi}$ można znaleźć przynajmniej na dwa sposoby. Sposób I polega na wyznaczeniu bazy $f=(f_1, f_2, f_3)$ dualnej do ϕ i znalezieniu $[F]^f_f$. Korzystamy następnie z faktu, że

$$[F^*]^{\phi}_{\phi} = \left([F]^f_f\right)^T.$$

Sposób II polega na bezpośrednim znalezieniu wyrazów macierzowych macierzy $[F^*]^{\phi}_{\phi}$ zgodnie z definicją macierzy odwzorowania.

SPOSÓB I Wektory bazy dualnej spełniają warunek $\langle \phi^k, f_i \rangle = \delta^k_i$. Oznacza to, że macierz złożone z wektorów f_i (jako kolumny) jest odwrotne do macierzy złożonej z kowektorów ϕ^k (jako wiersze)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 7/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7&3&2\\3&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}$$

$$f_1=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7\\3\\2\end{bmatrix}\qquad f_2=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\qquad f_3=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$[F]^e_f=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&1\\7&3&2\end{bmatrix}$$

$$[F]^f_f=[Id]^f_e[F]^e_f=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-3&1\\1&1&-5\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&1\\7&3&2\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&2&2\\10&2&0\\-30&-12&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-1&-1\\-5&-1&0\\15&6&4\end{bmatrix}$$

$$[F^*]^\phi_\phi=\begin{bmatrix}-3&-1&-1\\-5&-1&0\\15&6&4\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-3&-5&15\\-1&-1&6\\-1&0&4\end{bmatrix}$$

II SPOSÓB

Korzystamy z definicji macierzy odwzorowania. Oznaczamy $M=[F^*]^\phi_\phi$

Wtedy $M^i_j=\left(F^*(\phi_j)\right)^i$ tzn i-ta współrzędna kowektora $F^*(\phi_j)$ w bazie ϕ. Współrzędne w bazie ϕ dostajemy obliczając odpowiedni element z bazy dualnej

$$M^i_j=\left(F^*(\phi^j)\right)^i=\langle F^*(\phi^j),f_i\rangle=\langle\phi^j,F(f_i)\rangle \qquad (=A^j{}_i)$$

jeśli $A=[F]^f_f$

Jak widać ostateczne rachunki będą takie same...

ZADANIE 1

Znaleźć, jeśli istnieje macierz $S\in\mathbb{R}^3_3$ taką, że

$$S\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}\qquad S\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}\qquad S\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$$

oznaczamy v_1 v_2 v_3

Sprawdzamy czy układ (v_1,v_2,v_3) jest liniowo niezależny.

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\overset{k}{\sim}\begin{bmatrix}0&0&-1\\2&3&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\overset{k}{\sim}\begin{bmatrix}0&0&-1\\2&5&1\\1&0&0\end{bmatrix}\overset{k}{\sim}\begin{bmatrix}0&0&-1\\2&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\overset{k}{\sim}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)=\mathbb{R}^3$ tzn S istnieje

$$[S]_v^e = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad S = [S]_e^e = [S]_v^e \, [id]_e^v$$

Mamy $[id]_v^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ trzeba odwrócić

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{5} & +\frac{2}{5} & +\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$[id]_e^v = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 15 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$