

ALGEBRA R 13



Istnieje alternatywny sposób obliczanie znaku permutacji. Omówimy go na przykładzie permutacji $\rho \in S_8$, której już używaliśmy.

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

DEFINICJA: Niech $X = \{1, 2, \dots, n\}$ i niech $\sigma \in S_n$. **Inwersję** w zbiorze X względem permutacji σ nazywamy parę (i, j) elementów X taką, że $i < j$ a $\sigma(i) > \sigma(j)$. Zbiór inwersji względem σ oznaczymy J_σ .

Wypiszemy inwersje w $\{1, \dots, 8\}$ względem ρ . Najpierw pary takie, że $i < j$, pod nimi stosownie pary odwrotnie, dalej wybierzemy inwersje:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & (1,7) & (1,8) \\ (3,2) & (3,8) & (3,6) & (3,4) & (3,5) & (3,1) & (3,7) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & (2,7) & (2,8) \\ (2,8) & (2,6) & (2,4) & (2,5) & (2,1) & (2,7) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} (3,4) & (3,5) & (3,6) & (3,7) & (3,8) \\ (8,6) & (8,4) & (8,5) & (8,1) & (8,7) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) \\ (6,4) & (6,5) & (6,1) & (6,7) \end{array}$$

$$J_\rho = \left\{ (1,2); (1,7); (2,7); (3,4); (3,5); (3,6); (3,7); (3,8); (4,7); (4,5); (4,6); (5,7); (6,7); (5,6); (4,5); (5,7); (4,1); (4,7); (6,7); (5,1); (5,7); (7,8); (1,7) \right\}$$

$$|J_\rho| = 13$$

$$\rho = (1 \ 3 \ 8 \ 7)(4, 6, 5)$$

$$\text{sgn } \rho = (-1)^3 (-1)^2 = -1$$

FAKT Niech $\sigma \in S_n$ $\text{sgn } \sigma = (-1)^{|\mathcal{I}_\sigma|}$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$p \circ (3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow (3\ 4) \\ \downarrow p \end{matrix}$$

$$\mathcal{I}_\pi = \{ (1,2); (1,7); (2,7); (3,5); (3,6); (3,7); (4,5); (4,6); (4,7); (4,8); (5,7); (6,7) \} \quad |\mathcal{I}_\pi| = 12$$

$$\mathcal{I}_p = \{ (1,2); (1,7); (2,7); (3,4); (3,5); (3,6); (3,7); (3,8); (4,5); (4,6); (4,7); (5,7); (6,7) \}$$

π jest złożeniem $(3\ 4) \circ p$. Permutacja π różni się od p zamianą miejscami $p(3)$ i $p(4)$. Para $(3,4)$ była inwersją względem p , wobec tego nie jest inwersją względem π . Ponadto pary mające 3 na początku wymieniasz się z parami mającymi 4 na początku i odwrotnie. Ogólnie rzecz biorąc liczba inwersji spada o 1.

Żeby więc „sprawdzić” permutację p do e (która ma zero inwersji) potrzebujemy $|\mathcal{I}_p|$ transpozycji przedstawiających kolejne elementy. Wobec tego mamy:

$$e = p \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_m \Rightarrow p = \tau_m \circ \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

$\uparrow \uparrow \quad \uparrow$
 transpozycje $m = |\mathcal{I}_p|$ p da się przedstawić jako złożenie m transpozycji
 postaci $(i, i+1)$ $\text{wobec tego } \text{sgn } p = (-1)^m$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & 8 & 4 & 6 & \textcolor{green}{1} & 5 & 7 \\ 2 & 3 & \textcolor{green}{4} & 8 & 1 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & \textcolor{red}{1} & 8 & \textcolor{green}{5} & 6 & 7 \\ 2 & 3 & \textcolor{blue}{1} & 4 & \textcolor{green}{5} & 8 & 6 & 7 \\ 2 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{3} & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 \\ \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} \end{array} \begin{array}{l} \\ \downarrow (\textcolor{red}{1} \textcolor{red}{2})(\textcolor{blue}{4} \textcolor{blue}{5})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7}) \\ \downarrow (\textcolor{green}{3} \textcolor{green}{4})(\textcolor{green}{5} \textcolor{green}{6}) \\ \downarrow (\textcolor{red}{4} \textcolor{red}{5})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7}) \\ \downarrow (\textcolor{blue}{3} \textcolor{blue}{4})(\textcolor{green}{5} \textcolor{green}{6}) \\ \downarrow (\textcolor{red}{2} \textcolor{red}{3})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7}) \\ \downarrow (\textcolor{blue}{1} \textcolor{blue}{2})(\textcolor{red}{7} \textcolor{red}{8}) \end{array}$$

$$e = p \circ (\textcolor{red}{1} \textcolor{red}{2})(\textcolor{blue}{4} \textcolor{blue}{5})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7})(\textcolor{blue}{3} \textcolor{blue}{4})(\textcolor{green}{5} \textcolor{green}{6})(\textcolor{red}{4} \textcolor{red}{5})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7})(\textcolor{blue}{3} \textcolor{blue}{4})(\textcolor{green}{5} \textcolor{green}{6})(\textcolor{red}{2} \textcolor{red}{3})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7})(\textcolor{blue}{1} \textcolor{blue}{2})(\textcolor{red}{7} \textcolor{red}{8})$$

$$p = (\textcolor{red}{7} \textcolor{red}{8})(\textcolor{blue}{1} \textcolor{blue}{2})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7})(\textcolor{red}{2} \textcolor{red}{3})(\textcolor{green}{5} \textcolor{green}{6})(\textcolor{blue}{3} \textcolor{blue}{4})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7})(\textcolor{red}{4} \textcolor{red}{5})(\textcolor{green}{5} \textcolor{green}{6})(\textcolor{blue}{3} \textcolor{blue}{4})(\textcolor{green}{6} \textcolor{green}{7})(\textcolor{red}{4} \textcolor{red}{5})(\textcolor{blue}{1} \textcolor{blue}{2})$$

13 transpozycji kolejnych wyrazów jak 13 inwersji w p .

Powyższe rozumowanie dotyczące konkretnej permutacji nie stanowi oczywiście formalnego dowodu, tylko jednak nabyte doświadczenie „przetłumaczyć” na formalny dowód:

DOWÓD: Niech $\sigma \in S_n$ będzie dowolną, choć ustaloną permutacją. Niech J_σ oznacza zbiór inwersji tej permutacji. Zauważmy, że w zbiorze inwersji każdej permutacji różnej od e jest przynajmniej jedna inwersja postaci $(i, i+1)$. Gdyby tak nie było, to oznaczałoby że $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3) < \dots < \sigma(n)$ wobec tego $\sigma = e$. Złożenie $\sigma \circ (i \ i+1)$ ma o jedną inwersję mniej gdyż para $(i, i+1)$ nie jest już inwersją, ponadto inwersje postaci (i, k) zastępowane są przez $(i+1, k)$ a te postaci $(i+1, l)$ przez (i, l) . Jedyną różnicą „na sztuki” tworzy inwersję $(i, i+1)$. W zbiorze inwersji permutacji $\sigma \circ (i \ i+1)$ też jest inwersja postaci $(j \ j+1)$ chyba, że $\sigma \circ (i \ i+1) = e$. Kontynuujemy składowanie aż otrzymamy

$\sigma \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k = e$. Nastąpi to dla $k = |J_\sigma|$, gdyż za każdym złożeniem liczba inwersji maleje o 1. Wobec tego $\sigma = \tau_k \circ \tau_{k-1} \circ \dots \circ \tau_1$ i $\text{sgn } \sigma = (-1)^k$ ■

Wniosek: Każdą permutację da się złożyć z permutacji kolejnych wyrazów. Można więc powiedzieć, że **grupa permutacji jest generowana przez permutacje postaci $(i \ i+1)$.**

WYZNACZNIK MACIERZY

Jakiś czas temu, rozważając formy wieloliniowe antysymetryczne udowodniliśmy następujące twierdzenie

TWIERDZENIE

Istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\det: \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_n \rightarrow K^n$ spełniające warunki:

- (1) $\det$ jest n -liniowe
- (2) $\det$ jest antysymetryczne
- (3) $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$

Dowód polegał na wykazaniu, że przestrzeń wektorowa form n -liniowych i antysymetrycznych jest jednowymiarowa. Wtedy warunek (3) precyzuje konkretny element z tej przestrzeni. Brakowało sposobów liczenia wyznacznika. Mając wiedzę z teorii permutacji można temu zaradzić

Niech $v_1, \dots, v_n \in K^n$, tak $v_i = \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ \vdots \\ v_i^n \end{bmatrix}$

STWIERDZENIE

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot v_1^{\sigma(1)} v_2^{\sigma(2)} \dots v_n^{\sigma(n)}$$

Zanim przeprowadzimy dowód, wypiszmy wzory na $\det$ dla $n=2, 3$

$n=2$

$$\det(v_1, v_2) = \operatorname{sgn}(\operatorname{id}) v_1^1 v_2^2 + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v_2^1 v_1^2 = v_1^1 v_2^2 - v_2^1 v_1^2$$

$n=3$

$|S_3| = 3! = 6$ permutacje w zapisie w rozkładzie na cykle wraz ze znakami:

$$\begin{array}{cccccc} \operatorname{id} & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ + & - & - & - & + & + \end{array}$$

$$\det(v_1, v_2, v_3) = v_1^1 v_2^2 v_3^3 - v_1^2 v_2^1 v_3^3 - v_1^3 v_2^2 v_1^1 - v_1^1 v_2^3 v_2^2 + v_1^2 v_2^3 v_1^1 + v_1^3 v_2^1 v_2^2$$

Dla $n=4$ składników jest 24. Zdeklarowanie zbyt dużo, żeby zapisać. To pokazuje, że potrzebujemy jeszcze jakiegoś pomysłu na praktyczny wzór rachunkowy

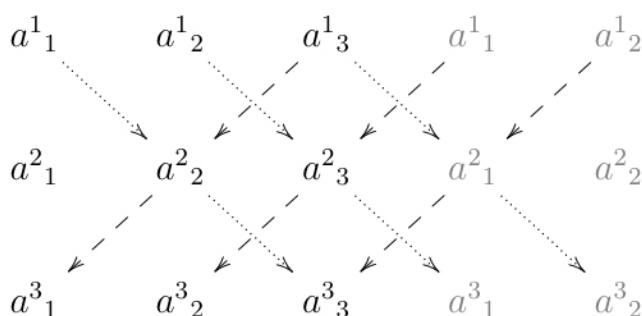
obrazki. Dodatnie iloczyny symbolizują następujące obrazki

$$\begin{bmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & \bullet \\ \bullet & & \\ & \bullet & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & \bullet & \\ & & \bullet \\ \bullet & & \end{bmatrix},$$

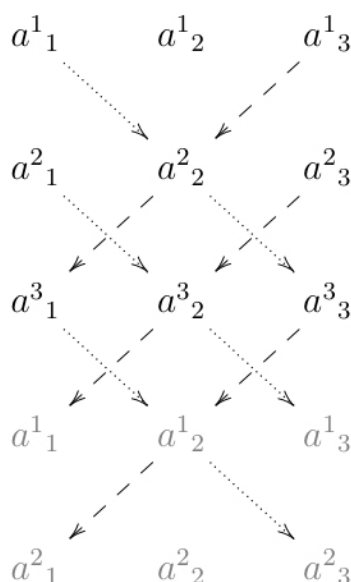
ujemne

$$\begin{bmatrix} \bullet & & \\ & & \bullet \\ & \bullet & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & \bullet \\ \bullet & & \\ & \bullet & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & \bullet & \\ & & \bullet \\ \bullet & & \end{bmatrix}.$$

Inni wolą tzw. schemat Sarrusa w wersji poziomej (dodatnie kropkowane, ujemne kreskowane)



a jeszcze inni schemat Sarrusa w wersji pionowej



DOWÓD Pokażemy że wzór określa formę m -liniową antysymetryczną. N -liniowość jest oczywiste. Sprawdźmy antysymetrię

$$\text{ozn. } \omega(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \, v_1^{\sigma(1)} \dots v_n^{\sigma(n)}$$

$$\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \, v_1^{\sigma(1)} \dots v_j^{\sigma(j)} \dots v_i^{\sigma(i)} \dots v_n^{\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \, v_1^{\sigma(1)} \dots v_i^{\sigma(j)} \dots v_j^{\sigma(i)} \dots v_n^{\sigma(n)} = \sum_{\tau = (i \, j)} \text{sgn} \tau \, v_1^{\sigma \circ \tau(1)} \dots v_i^{\sigma \circ \tau(i)} \dots v_j^{\sigma \circ \tau(j)} \dots v_n^{\sigma \circ \tau(n)}$$

$$\rho = \sigma \circ \tau \quad \text{sgn} \sigma = -\text{sgn} \rho$$

$$= \sum_{\rho \in S_n} (-\text{sgn} \rho) v_1^{\rho(1)} \dots v_n^{\rho(n)} = -w(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n) \quad \text{w jest więc antysymetryczne}$$

Policzmy $w(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma e_1^{\sigma(1)} e_2^{\sigma(2)} \dots e_n^{\sigma(n)}$ Wiadomo że $e_i^{\sigma(i)} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(i) = i$

zatem tylko jeden składnik sumy jest niezerowy – ten z permutacją identycznościową. ■

Liczenie wyznacznika z tego wzoru jest mało praktyczne. Potrzebujemy lepszego wzoru. Najpierw kilka faktów dotyczących wyznacznika

STWIERDZENIE

(1) $\det A^T = \det A$ (2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

DOWÓD oznaczamy a_i kolumny macierzy A

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma a_{\sigma^{-1}(1)}^1 a_{\sigma^{-1}(2)}^2 \dots a_{\sigma^{-1}(n)}^n =$$

$$= \sum_{\rho \in S_n} \text{sgn} \rho a_{\rho(1)}^1 \dots a_{\rho(n)}^n = \det A^T \quad \begin{matrix} a^i - \text{wiersze macierzy } A \\ \text{ i kolumny macierzy } A^T \end{matrix}$$

(2) $[a_1 \dots a_n][b_1 \dots b_n] = \left[\sum b_1^k a_k, \sum b_2^k a_k, \dots, \sum b_n^k a_k \right]$

$$\det(AB) = \det \left(\sum b_1^k a_k, \dots, \sum b_n^k a_k \right) =$$

$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_n} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \dots b_n^{k_n} \det(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}) =$$

różne od zera jedynie wtedy gdy

$(1, \dots, n) \mapsto (k_1, \dots, k_n)$ jest permutacją

$$= \sum_{\rho \in S_n} \text{sgn} \rho b_1^{\rho(1)} \dots b_n^{\rho(n)} \det(a_1, \dots, a_n) = \det B \det A$$

Parzystość nie zależy od r_1, r_2 : niezależnie od sposobu dochodzenia do docelowej permutacji liczba kroków ma dobrze określoną parzystość. $\square$

Zauważmy także, że każda permutacja (będąc bijekcją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ w siebie) jest odwracalna, tzn. dla każdego σ istnieje ρ takie, że

$$\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma = \text{id}, \text{ tzn. } \rho = \sigma^{-1}.$$

Chwila zastanowienia daje wniosek, że

$$\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}.$$

Permutacja σ^{-1} składa się z tych samych transpozycji co σ , tylko zastosowanych w odwrotnej kolejności. Dzięki temu możemy udowodnić twierdzenie:

Fakt 2.

$$\det A = \det A^T.$$

Dowód: Korzystamy ze wzoru:

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a^{\sigma(1)}_1 a^{\sigma(2)}_2 \cdots a^{\sigma(n)}_n =$$

i przestawiamy wyrazy w każdym iloczynie $a^{\sigma(1)}_1 a^{\sigma(2)}_2 \cdots a^{\sigma(n)}_n$ tak, aby były uporządkowane zgodnie z kolejnością górnych indeksów. Otrzymujemy wtedy

$$= \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a^1_{\sigma^{-1}(1)} a^2_{\sigma^{-1}(2)} \cdots a^n_{\sigma^{-1}(n)} =$$

Ponieważ każda permutacja ma odwrotną, a znaki σ i σ^{-1} są takie same, możemy sumować po σ^{-1} :

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \text{sgn } \sigma^{-1} a^1_{\sigma^{-1}(1)} a^2_{\sigma^{-1}(2)} \cdots a^n_{\sigma^{-1}(n)} =$$

Jeśli teraz $B = A^T$, to $b^i_j = a^j_i$ zatem

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \text{sgn } \sigma^{-1} b^{\sigma^{-1}(1)}_1 b^{\sigma^{-1}(2)}_2 \cdots b^{\sigma^{-1}(n)}_n =$$

Żeby uniknąć niejasności oznaczamy wskaźnik sumowania przez ρ i dostajemy

$$= \sum_{\rho} \text{sgn } \rho b^{\rho(1)}_1 b^{\rho(2)}_2 \cdots b^{\rho(n)}_n = \det B = \det A^T.$$

$\square$.

Wzór z permutacjami jest trochę mało praktyczny. Już dla macierzy 4×4 sumować musimy 24 składniki. Warto wymyśleć jakiś wygodniejszy wzór. W poniższych rozważaniach skorzystamy z faktu, że wyznacznik jest wieloliniowy ze względu na kolumny macierzy oraz że nie zmienia się jeśli do kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych. Przyjrzyjmy się bliżej tej drugiej własności - do k -tej kolumny dodamy wielokrotność pierwszej:

$$\text{vol}(a_1, a_2, \dots, a_k + \lambda a_1, \dots, a_n) = \text{vol}(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n) + \lambda \text{vol}(a_1, a_2, \dots, a_1, \dots, a_n)$$

Drugi składnik sumy jest równy zero, gdyż na miejscu k -tym i pierwszym stoi ten sam wektor.

Ustalmy teraz macierz A , jej kolumny $a_1, \dots, a_n$ i indeks $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\det A = \text{vol}(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) =$$

Zapisujemy a_i w bazie standardowej: $a_i = a^1_i e_1 + a^2_i e_2 + \dots + a^n_i e_n$:

$$= \text{vol}(a_1, a_2, \dots, a^1_i e_1 + a^2_i e_2 + \dots + a^n_i e_n, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a^j_i \text{vol}(a_1, a_2, \dots, e_j, \dots, a_n).$$

popatrzmy na k -ty składnik powyższej sumy:

$$a^k_i \text{vol}(a_1, a_2, \dots, e_k, \dots, a_n) = a^k_i \det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & 0 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & 0 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^k_1 & a^k_2 & \dots & 1 & \dots & a^k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & 0 & \dots & a^n_n \end{bmatrix} =$$

Przy pomocy 1 w i -tej kolumnie i k -tym wierszu można wyzerować prawie cały k -ty wiersz odejmując od wszystkich kolumn poza i -tą wektor $a^k_j e_k$:

$$= a^k_i \text{vol}(a_1, a_2, \dots, e_k, \dots, a_n) = a^k_i \text{vol}(a_1 - a^k_1 e_k, a_2 - a^k_2 e_k, \dots, e_k, \dots, a_n - a^k_n e_k) = a^k_i \det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & 0 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & 0 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & 0 & \dots & a^n_n \end{bmatrix} =$$

Przestawiamy teraz i -tą kolumnę na pierwsze miejsce zmieniając znak $i - 1$ razy, a następnie k -ty wiersz na pierwsze miejsce zmieniając znak $k - 1$ razy:

$$= (-1)^{i-1} (-1)^{k-1} a^k_i \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_{i-1} & a^1_{i+1} & \dots & a^1_n \\ 0 & a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_{i-1} & a^2_{i+1} & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^{k-1}_1 & a^{k-1}_2 & \dots & a^{k-1}_{i-1} & a^{k-1}_{i+1} & \dots & a^{k-1}_n \\ 0 & a^{k+1}_1 & a^{k+1}_2 & \dots & a^{k+1}_{i-1} & a^{k+1}_{i+1} & \dots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_{i-1} & a^n_{i+1} & \dots & a^n_n \end{bmatrix}.$$

Bez trudu stwierdzimy, że ostatni wyznacznik jest równy wyznacznikowi macierzy $(n-1) \times (n-1)$ postaci

$$\det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_{i-1} & a^1_{i+1} & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_{i-1} & a^2_{i+1} & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{k-1}_1 & a^{k-1}_2 & \dots & a^{k-1}_{i-1} & a^{k-1}_{i+1} & \dots & a^{k-1}_n \\ a^{k+1}_1 & a^{k+1}_2 & \dots & a^{k+1}_{i-1} & a^{k+1}_{i+1} & \dots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_{i-1} & a^n_{i+1} & \dots & a^n_n \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy z wykreślonym k -tym wierszem i i -tą kolumną pomnożony przez $(-1)^{k+i}$ nazywamy *dopełnieniem algebraicznym* wyrazu a^k_i i oznaczamy A^i_k . Zwróćmy uwagę na położenie indeksów!!! Wstawiamy dotychczasowe ustalenia do początkowego wzoru na wyznacznik i otrzymujemy

$$\det A = \sum_{j=1}^n a^j_i A^i_j$$

Powyższy wzór nazywa się **Rozwinięciem Laplace’a** względem i -tej kolumny. Z niezmienniczości wyznacznika względem transpozycji wynika, że można rozwijać także względem wiersza, wtedy rozwinięcie Laplace’a ma postać (rozwinięcie względem j -tego wiersza)

$$\det A = \sum_{k=1}^n a^j_k A^k_j.$$

Rozwinięcie Laplace’a wykorzystać można do wyprowadzenia dwóch pożytecznych wzorów: wzoru na macierz odwrotną i tzw. wzorów Cramera dotyczących problemu rozwiązywania niezdegenerowanych układów równań liniowych.

Wzór na macierz odwrotną. Niech A będzie macierzą $n \times n$ taką, że $\det A \neq 0$. Wtedy, jak wiadomo, istnieje A^{-1} . Oznaczmy przez A^D macierz

$$A^D = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix}$$

zwaną *macierzą dopełnień algebraicznych* albo *macierzą dołączoną*. Obliczmy iloczyn AA^D :

$$AA^D = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix}.$$

Wyraz diagonalny na pozycji $*^k_k$ ma postać:

$$\sum_{j=1}^n a^k_j A^j_k = \det A.$$

skorzystaliśmy z rozwinięcia Laplace’a. Wyraz pozadiagonalny $*^k_l$ dla $k \neq l$ ma postać

$$\sum_{j=1}^n a^k_j A^j_l$$

Powyższa suma jest równa zero, gdyż zgodnie z rozwinięciem Laplace’a jest to wyznacznik macierzy w której w k -tym i l -tym wierszu stoi ten sam k -ty wiersz wyjściowej macierzy A . Otrzymujemy więc

$$AA^D = \det A \cdot \mathbf{1}.$$

Podobnie okazuje się, że

$$A^D A = \det A \cdot \mathbf{1}.$$

W uzasadnieniu wykorzystuje się rozwinięcie Laplace’a względem kolumny, a nie wiersza. W ten sposób uzyskujemy wzór:

Fakt 3. Jeśli $\det A \neq 0$ to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D.$$

Wzory Cramera. Niech teraz A będzie macierzą układu równań:

$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \dots + a^1_n x^n = b^1 \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \dots + a^2_n x^n = b^2 \\ \vdots \\ a^n_1 x^1 + a^n_2 x^2 + \dots + a^n_n x^n = b^n \end{cases} \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Jeśli $\det A$ jest różne od zera to istnieje A^{-1} i układ równań ma jedno rozwiązanie:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Korzystając ze wzoru na macierz odwrotną stwierdzamy, że k -ta współrzędna wektora $\vec{x}$ ma postać

$$x^k = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n A^k_j b^j.$$

Ze wzoru na rozwinięcie Laplace'a względem k -tej kolumny wynika, że

$$\sum_{j=1}^n A^k_j b^j$$

jest wyznacznikiem macierzy A w której k -tą kolumnę podmieniono na wyraz wolny:

$$\sum_{j=1}^n A^k_j b^j = \det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & b^1 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & b^2 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & b^n & \dots & a^n_n \end{bmatrix}.$$

Przy badaniu funkcji wielu zmiennych przydatne będzie **wyznaczanie sygnatury formy kwadratowej metodą wyznacznikową**. Niech Q będzie formą dwuliniową symetryczną, której macierz w bazie $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ jest

$$[Q]_e = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix}.$$

Poszukamy alternatywnej metody znajdowania bazy diagonalizującej. Nową bazę oznaczać będziemy literą f . Niech $f_1 = e_1$. W podprzestrzeni rozpiętej przez e_1 i e_2 szukamy wektora f_2 takiego, że

$$Q(f_1, f_2) = 0.$$

Wiadomo, że wektor ten jest kombinacją liniową wektorów $e_1 = f_1$ i e_2 :

$$f_2 = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2$$

Współczynniki wyznaczymy z warunku $Q(f_1, f_2) = 0$:

$$0 = Q(f_1, f_2) = Q(e_1, \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2) = \lambda^1 Q(e_1, e_1) + \lambda^2 Q(e_1, e_2) = \lambda^1 Q_{11} + \lambda^2 Q_{12}$$