# ALGEBRA R 15

# FORMY KWADRATOWE CD.

Kontynuujemy rozważania dotyczące form kwadratowych. Zacznijmy od przypomnienie najważniejszych faktów.

Forma kwadratowa pochodzi od formy dwuliniowej symetrycznej zgodnie ze wzorem $q(v) = Q(v,v)$. Jeśli znamy jedynie formę kwadratową, odpowiednią formę dwuliniową możemy odzyskać używając formuły polaryzacyjnej, tzn wzoru

$$Q(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$

Odpowiedniość między formami kwadratowymi a dwuliniowymi symetrycznymi jest więc wzajemnie jednoznaczna. Wiadomo, że formy dwuliniowe możemy zapisywać na różne sposoby – w szczególności możemy korzystać z macierzy formy w bazie albo z wyrażenie we współrzędnych.

Macierzą formy kwadratowej nazywać będziemy macierz odpowiadającej jej formy dwuliniowej symetrycznej. Macierz formy kwadratowej jest więc symetryczna. Niech więc $A$ będzie macierzą formy $q$ w bazie $e$, tzn

$A = [q]_e = [Q]_e \quad a_{ij} = Q(e_i, e_j) \quad a_{ij} = a_{ji}$ Zapiszemy $x \in V$ w bazie

$x = x^i e_i$ i obliczamy $q(x)$:

$$q(x) = [x^1 \dots x^n]\, A \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = [x^1 \dots x^n] \begin{bmatrix} \sum_j a_{1j} x^j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} x^j \end{bmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j =$$

Wyrażenie formy we współrzędnych jest wielomianem stopnia 2 od tych współrzędnych.

Biorąc pod uwagę, że $x^i x^j = x^j x^i$ oraz $a_{ij} = a_{ji}$ można napisać

$$= \sum_i a_{ii} (x^i)^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} x^i x^j$$

Tzn np. w $\mathbb{R}^3$ ze współrzędnymi $x, y, z$ w bazie kanonicznej formie o macierzy $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ odpowiada $ax^2 + dy^2 + fz^2 + 2bxy + 2cxz + 2eyz$

**TWIERDZENIE** (Lagrange) Dla każdej formy kwadratowej istnieje baza w której macierz tej formy jest diagonalna.

**PRZYKŁAD** Na przestrzeni $\mathbb{R}_2[\,]$ rozważmy formę kwadratową

$$q(v) = \int_0^1 v^2(t)\,dt.$$

łatwo stwierdzić, że odpowiadająca jej formę dwuliniową symetryczną to $Q(v,w)=\int_0^1 v(t)w(t)\,dt$

Znajdźmy macierz w bazie jednomianów $\underset{e_1(t)}{1},\ \underset{e_2(t)}{t},\ \underset{e_3(t)}{t^2}$

$Q_{11}=\int_0^1 dt=1 \quad Q_{12}=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2} \quad Q_{13}=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3} \quad Q_{22}=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3} \quad Q_{23}=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4} \quad Q_{33}=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}$

$$[Q]_e=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$v=ae_3+be_2+c$

$$q(v)=c^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{5}a^2+bc+\frac{2}{3}ac+\frac{1}{2}ab=c^2+c\left(b+\frac{2}{3}a\right)+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab=$$
$$=\left(c+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab=$$
$$=\left(c+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a\right)^2-\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{3}ab-\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab=$$
$$=\left(c+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{1}{12}b^2+\frac{1}{6}ab+\frac{4}{45}a^2=$$
$$=\left(c+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+a\frac{b}{2}+\frac{4}{15}a^2\right]=$$
$$=\left(c+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\right)^2\underbrace{-\frac{1}{4}a^2+\frac{4}{15}a^2}_{1/60\,a^2}\right]=\left(c+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{180}a^2$$

$\alpha=c+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a \quad \beta=\frac{b}{2}+\frac{a}{2} \quad \gamma=a$ $\longrightarrow$ nowe współrzędne diagonalizujące. W bazie odpowiadającej tym współrzędnym macierz formy to

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/180 \end{bmatrix}$$

Znajdźmy wektory bazowe

$a=\gamma \qquad b=2\beta-\gamma \qquad c=\alpha-\frac{1}{2}(2\beta-\gamma)-\frac{1}{3}\gamma=\alpha-\beta+\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{3}\gamma=\alpha-\beta+\frac{1}{6}\gamma$

$$at^2+bt+c=\gamma t^2+(2\beta-\gamma)t+\alpha-\beta+\frac{1}{6}\gamma=\gamma\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)+\beta(2t-1)+\alpha\cdot 1$$

$f_1(t)=1 \quad f_2(t)=2t-1 \quad f_3(t)=t^2-t+\frac{1}{6}$

Przykład pokazuje jak można udowodnić twierdzenie

DOWÓD: Zapiszmy formę we współrzędnych $q(x)=\sum_i q_{ii}(x^i)^2+2\sum_{i<j}q_{ij}x^ix^j$. Załóżmy najpierw, że istnieje $i_0$ takie że $q_{i_0i_0}\neq 0$. Bez straty ogólności możemy przenumerować współrzędne tak, że $i_0=1$

$$q(x)=q_{11}(x^1)^2+\sum_{j>1}q_{1j}x^1x^j+\sum_{i>1}q_{ii}(x^i)^2+\sum_{1>i>j}q_{ij}x^ix^j=$$
$$=q_{11}\left(x^1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{q_{11}}\sum_{i>1}q_{1j}x^j\right)^2-\left[\frac{1}{4q_{11}}\sum_{i>1}q_{1j}x^j\right]^2+\sum_{i>1}q_{ii}(x^i)^2+\sum_{1>i>j}q_{ij}x^ix^j$$

nie zawiera $x^1$ $\longrightarrow$ proces powtarzamy, operacja zakończy się nie później niż po $n=\dim V$ krokach.

W generycznym przypadku dostajemy formę w postaci sumy $n$ kwadratów wielomianów stopnia 1 od starych współrzędnych:

$$\lambda_1\underbrace{(x^1+a_{12}x^2+\dots+a_{1n}x^n)}_{\alpha^1}{}^2+\lambda_2\underbrace{(x^2+a_{23}x^3+\dots+a_{2n}x^n)}_{\alpha^2}{}^2+\dots+\lambda_n {x^n}^2$$

$$\alpha^n=x^n$$

$(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ są nowymi współrzędnymi. Baza do nich dualna jest bazą diagonalizującą, macierz formy w tej bazie to $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

Co może pójść źle? Na początku lub po którymś kroku nie ma wyrazu kwadratowego, tzn są same wyrazy postaci $2q_{ij}x^ix^j$ $i\neq j$. Wybieramy wtedy dowolne dwie współrzędne, przenumerowując można im nadać numery 1,2 i prowadzimy wstępną zamianę współrzędnych $x^1=y^1+y^2$ $x^2=y^1-y^2$ $x^3=y^3$ $\dots$ $x^n=y^n$. Wtedy $x^1x^2=(y^1)^2-(y^2)^2$ i mamy wyraz czysto kwadratowy do rachunków.

Druga rzecz, która może pójść źle to to, że procedura urwie się wcześniej niż po $n$ krokach. Oznacza to, że macierz formy, a więc sama forma jest zdegenerowana. Wówczas poszukiwanie bazy diagonalizującej należy zacząć od znalezienia jądra formy, tzn

$\ker Q=\{v\in V:\ \forall w\ \ Q(v,w)=0\}$ Wybieramy bazę $\ker Q$: $(e_1,\dots,e_k)$ i uzupełniamy do bazy całej przestrzeni: $(e_1\dots e_k, e_{k+1},\dots,e_n)$ Macierz $Q$ w tak stworzonej bazie ma postać

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{00}}^{k} & \overbrace{\hphantom{000}}^{n-k} \end{array} \\ k\left\{\vphantom{0}\right. & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \end{array}$$

Proces diagonalizacji przeprowadzamy jedynie na współrzędnych odpowiadających wektorom $e_{k+1}\dots e_n$, współrzędne przy $e_1\dots e_k$ zostawiamy bez zmian.

∎

**OBSERWACJA**: Zauważmy, że niezerowe współczynniki na diagonali można wciągnąć do definicji współrzędnych tak, żeby na diagonali były już tylko $\pm1$ i $0$.

$$\lambda_k(x^k+a_{k\,k+1}x^{k+1}+\dots+a_{kn}x^n)^2=\operatorname{sgn}\lambda_k\Big(\underbrace{\sqrt{|\lambda_k|}\,(x^k+a_{k\,k+1}x^{k+1}+\dots+a_{kn}x^n)}_{\tilde{\alpha}^k}\Big)^2$$

czyli dla każdej formy istnieje baza diagonalizująca taka, że macierz ma na diagonali jedynie liczby ze zbioru $\{-1,0,1\}$.

**OBSERWACJA 2**: Baza diagonalizująca nie jest jednoznacznie wyznaczona. Jest wiele baz diagonalizujących. Jest także wiele baz takich, że postać diagonalna ma na diagonali liczby ze zbioru $\{-1,0,1\}$.

Jest jednak w tym wszystkim coś co nie jest dowolne

James Joseph Sylvester 1814-1897

**TWIERDZENIE** (Sylvestera o bezwładności form kwadratowych) Jeśli $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ i $(\beta_1\dots\beta_n)$ są układami współrzędnych diagonalizujących formę kwadratową $q$ i jeśli

$$q(\alpha^1\dots\alpha^n)=\sum_i a_i(\alpha^i)^2 \qquad q(\beta^1\dots\beta^n)=\sum_j b_j(\beta^j)^2$$

to w zbiorach $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ jest tyle samo elementów dodatnich, tyle samo ujemnych i tyle samo zer.

**DOWÓD**: Zauważmy najpierw, że wartość bezwzględną współczynników $a_i$ i $b_j$ można „wciągnąć" do definicji współrzędnych tak, że zbiory $A$ i $B$ składają się z elementów $+1,-1,0$. Uporządkujmy współrzędne w obu układach tak, że najpierw są $+1$ potem $-1$ a na końcu zera. Wtedy

$$q(v)=\sum_{i=1}^{p_\alpha}(\alpha^i(v))^2-\sum_{i=p_\alpha+1}^{p_\alpha+r_\alpha}(\alpha^i(v))^2=\sum_{i=1}^{p_\beta}(\beta^i(v))^2-\sum_{i=p_\alpha+1}^{p_\beta+r_\beta}(\beta^i(v))^2$$

Przy tych oznaczeniach naszym zadaniem jest wykazać, że $p_\alpha=p_\beta$ i $r_\alpha=r_\beta$. Jest jasne, że $p_\alpha+r_\alpha=p_\beta+r_\beta=n-\dim\ker Q$.

Załóżmy teraz, że $p_\beta<p_\alpha$ tzn $p_\beta-p_\alpha<0$ tzn $n+p_\beta-p_\alpha<n$. Rozważmy układ równań

$$\beta^1(v)=0,\ \beta^2(v)=0\ \dots\ \beta^{p_\beta}(v)=0,\ \alpha^{p_\alpha+1}(v)=0,\dots,\alpha^n(v)=0$$

Równań jest $p_\beta+n-p_\alpha=n+p_\beta-p_\alpha<n$, są to równania liniowe zatem istnieje niezerowe rozwiązanie $v_0$. Dla takiego $v_0$ mamy

$$q(v_0)=\underbrace{(\alpha^1(v_0))^2+\dots+(\alpha^{p_\alpha}(v_0))^2}_{\geq 0}=\underbrace{-(\beta^{p_\beta+1}(v_0))^2-\dots-(\beta^{p_\beta+r_\beta}(v_0))^2}_{\leq 0}$$

Wynika z tego, że $q(v_0)\geq 0$ i $q(v_0)\leq 0$ czyli $q(v_0)=0$. Wtedy jednak

$\alpha^1(v_0)=0\dots\alpha^{p_\alpha}(v_0)=0$ i z układu równań $\alpha^{p_\alpha+1}(v_0)=0=\dots=\alpha^n(v_0)$

Wygląda więc na to, że wszystkie współrzędne $v_0$ w układzie $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ są $0$ czyli $v_0=0$ $\Longrightarrow$ sprzeczność! Nie może więc być $p_\beta<p_\alpha$. Żaden z układów współrzędnych nie jest wyróżniony, więc $p_\alpha<p_\beta$ też nie może być. Z tego wynika $p_\alpha=p_\beta$, zatem także $r_\alpha=r_\beta$. ■

**DEFINICJA** Parę $(p,q)$ gdzie $p$ oznacza liczbę dodatnich a $q$ liczbę ujemnych wyrazów na diagonali w postaci diagonalnej formy kwadratowej nazywamy sygnaturą formy kwadratowej. Liczbę $p+q$ nazywamy rzędem formy kwadratowej. Jeśli sygnatura formy jest $(n,0)$ to mówimy że forma jest dodatnio określona. Jeśli sygnatura jest $(0,n)$ to mówimy że forma jest ujemnie określona

Forma dodatnio określona spełnia warunek $q(v)>0$ dla $v\neq 0$. Forma ujemnie określona spełnia warunek $q(v)<0$ dla $v\neq 0$.

Iloczyn skalarny to forma dwuliniowa symetryczna, której forma kwadratowa jest dodatnio określona

Jeśli $p+q=n$ mówimy że forma jest niezdegenerowana.

Sygnaturę $(1,3)$ (lub $(3,1)$ zależnie od konwencji) nazywamy sygnaturę Lorenzowską. Pojawia się one w OTW i STW.