ALGEBRA R 16

Nowy semestr zaczynamy od fizycznego (fizyka teoretyczna / fizyka matematyczna) przykładu związanego z pojęciem formy dwuliniowej symetrycznej i formy kwadratowej. Czy wiedzą Państwo co to jest transformacja Lorentza? W jednym ze znaczeń jest to transformacja współrzędnych między inercjalnymi układami odniesienia poruszającymi się względem siebie z prędkością v w Szczególnej Teorii Względności. Sformułujmy to matematycznie.

DEFINICJA Przestrzenią afiniczną nazywamy trójkę (A, V, α) gdzie A jest zbiorem, V przestrzenią wektorową, $\alpha : A \times V \longrightarrow A$ odwzorowaniem spełniającym następujące warunki

(1) $\forall\, a \in A,\, v, w \in V \quad \alpha(\alpha(a,v), w) = \alpha(a, v+w)$

(2) $\forall\, a, b \in A \quad \exists!\, v \in V : \quad \alpha(a, v) = b$

(3) $\forall\, a \in A \quad \alpha(a, \vec{0}) = a$

W praktyce, zamiast $\alpha(a,v)$ piszemy $a + v$

wtedy (1) $(a+v)+w = a+(v+w)$

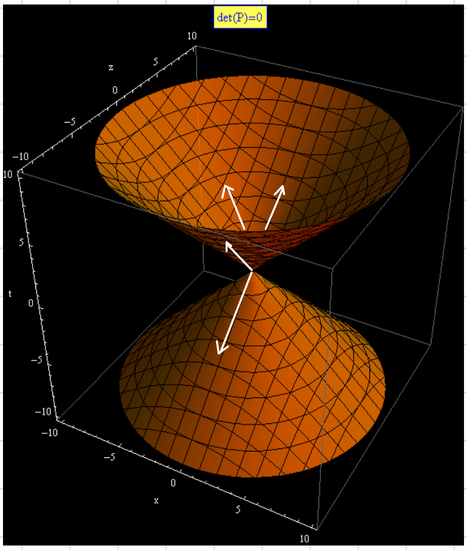
(3) $a + \vec{0} = a$

Piszemy też (2) $v = a - b$ jeśli $b = a + v$

Przestrzeń V nazywamy modelową dla A. Wymiarem A nazywamy wymiar V.

DEFINICJA: Przestrzenią Minkowskiego nazywamy czterowymiarową afiniczną przestrzeń M, której przestrzeń modelowa V wyposażona jest w dwuliniową symetryczną formę η o sygnaturze $(1,3)$.

Forma η jest niezdegenerowana, jednak ze względu na sygnaturę istnieją wektory niezerowe takie, że $\eta(v,v) = 0$. Tworzą one stożek w V. Wektory wewnątrz stożka nazywają się czasowe, na zewnątrz przestrzenne, na stożku zerowe albo świetlne.



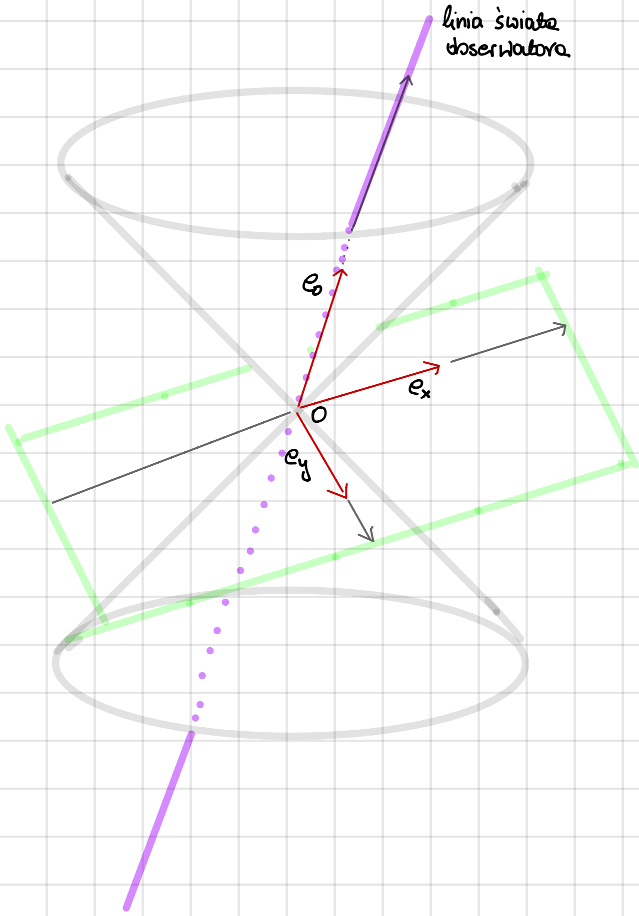
Wybierzmy czasowy wektor e_0 taki, że $\eta(e_0, e_0) = 1$. Można wtedy w V wyróżnić podprzestrzeń wektorową W

$W = \{ v \in V : \eta(v, e_0) = 0 \}$ Jest ona trójwymiarowa i zawiera jedynie wektory przestrzenne. Mamy też $V = \langle e_0 \rangle \oplus W$. Forma $-\eta|_W$ jest iloczynem skalarnym na W. Wybór e_0 rozkłada V na „przestrzeń" W i czas $\langle e_0 \rangle$. Dodatkowo możemy wybrać bazę ortonormalną w W (e_x, e_y, e_z) i mamy współrzędne w V związane z bazą (e_0, e_x, e_y, e_z).

Obserwatorem inercjalnym w M nazywamy parę (O, e_0) gdzie O jest punktem w M a e_0 jest jak wyżej. Wybór O to wybór początku układu współrzędnych w M. Linia świata $O + \langle e_0 \rangle$ reprezentuje „istnienie" obserwatora w M. Można ją sparametryzować czasem własnym $t \longmapsto O + ct e_0$. Jeśli obserwator wybierze sobie $(e_x\ e_y\ e_z)$ w swoim W to już może opisywać dowolne zdarzenie podając jego współrzędne czasową i przestrzenne

$$Z = O + cte_0 + xe_x + ye_y + ze_z$$

Załóżmy teraz że w M istnieje inny obserwator inercjalny. Załóżmy dla ułatwienia, że „początek świata" jest dla niego taki sam – punkt O. Jednak mają inne wektory „e_0". Niech ten drugi obserwator ma e_0' – czasowy, długości 1. Pierwszy obserwator w swojej bazie opisze e_0' rozkładając na e_0, e_x, e_y, e_z. Załóżmy dla ułatwienia, że $e_0' \in \langle e_0, e_x \rangle$



Linia świata drugiego obserwatora $\mathcal{O}+\langle e_0' \rangle$ zostanie opisana przez pierwszego w parametryzacji jego czasem własnym t jako

$$t \longmapsto \mathcal{O} + cte_0 + vte_x \qquad e_0' = \lambda(ce_0+ve_x) \qquad \lambda^2c^2-\lambda^2v^2=1 \qquad \lambda^2(c^2-v^2)=1 \qquad \lambda=\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$e_0' = \frac{1}{c\sqrt{}}(ce_0+ve_x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{\gamma}\Big(e_0+\underbrace{\frac{v}{c}}_{\beta}e_x\Big) = \gamma e_0+\beta\gamma e_x$$

Obserwator primowany widzi świat po swojemu. Swoją linię świata parametryzuje swoim czasem własnym $t' \longmapsto \mathcal{O}+ct'e_0'$. Ma też swoją W' taką że $V=\langle e_0' \rangle \oplus W'$ i elementy W' są „prostopadłe" do $\langle e_0' \rangle$. Bazę w W' obserwator może wybrać dowolnie, ale załóżmy że chce to zrobić tak żeby pierwszy obserwator poruszał się w kierunku e_x'.

$$e_x' = ae_0+be_x \qquad \eta(e_x',e_x')=-1 \qquad \eta(e_0',e_x')=0$$

$$\longrightarrow \gamma a-\beta\gamma b=0 \Rightarrow a=\beta b$$

$$e_x'=\beta b e_0 + b e_x$$

$$\beta^2b^2-b^2=-1 \qquad b^2(1-\beta^2)=1 \qquad b^2=1/(1-\beta^2)=\gamma^2 \qquad b=\pm\gamma$$
, wybieramy $+$ $\quad e_x'=\beta\gamma e_0+\gamma e_x$

Łatwo zauważyć że można wziąć $e_y'=e_y$, $e_z'=e_z$

$$\boxed{\begin{aligned} e_0' &= \gamma e_0+\beta\gamma e_x \\ e_x' &= \beta\gamma e_0 + \beta e_x \\ e_y' &= e_y \\ e_z' &= e_z \end{aligned}}$$

Jak wyglądają transformacje współrzędnych związane z tą zamianą bazy?

Współrzędne w (e_0, e_x, e_y, e_z) to (ct, x, y, z) a współrzędne w (e_0', e_x', e_y', e_z') to (ct', x', y', z')

$$Z = O + cte_0 + xe_x + ye_y + ze_z = O + ct'e_0' + x'e_x' + y'e_y' + z'e_z'$$

$$\Downarrow$$

$$cte_0 + xe_x + ye_y + ze_z = ct'e_0 + x'e_x' + y'e_y' + z'e_z'$$

$$\begin{aligned} e_0' &= \gamma e_0 + \beta\gamma e_x \\ e_x' &= \beta\gamma e_0 + \gamma e_x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} e_0 &= \gamma e_0' - \beta\gamma e_x' \\ e_x &= -\beta\gamma e_0' + \gamma e_x' \end{aligned}$$

$$ct(\gamma e_0' - \beta\gamma e_x') + x(-\beta\gamma e_0' + \gamma e_x') + ye_y' + ze_z' = ct'e_0 + x'e_x' + y'e_y' + z'e_z'$$

$$(ct\gamma - x\beta\gamma)e_0' + (x\gamma - ct\beta\gamma)e_x' + ye_y' + ze_z' = ct'e_0 + x'e_x' + y'e_y' + z'e_z'$$

$$\begin{aligned} ct' &= ct\gamma - x\beta\gamma \\ x' &= x\gamma - ct\beta\gamma \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t' &= \gamma t - \gamma \frac{v}{c^2} x \\ x' &= -\gamma v t + \gamma x \end{aligned}$$

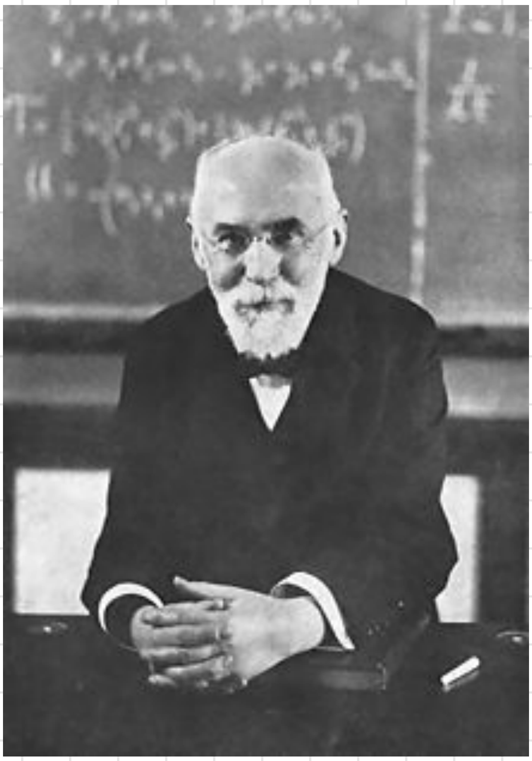
Wyprowadziliśmy występującą w podręcznikach do STW transformację Lorentza wyłącznie metodami algebraicznymi – – zero fizyki, sama algebra liniowa

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "\text{Transformacja Lorentza}"] \\ V \arrow[ur, "\text{baza } e"] \arrow[r, "\text{baza } e'"'] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(-vt + x) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Odkrycie przestrzeni Minkowskiego i użycie jej w roli czasoprzestrzeni w STW uwalnia nas od „względności" i konieczności pisania wszystkiego we współrzędnych i sprawdzania czy się dobrze transformuje

Hendrik Lorenz (1853–1928)



Hermann Minkowski 1864–1909

Sygnaturę formy kwadratowej odczytujemy z macierzy tej formy w bazie diagonalizującej. Znamy już jedną metodę diagonalizacji – metodę Lagranża. Teraz zajmiemy się drugą metodą, którą nazwiemy na użytek tego wykładu „metodą wyznacznikową". Ma ona tę wadę, że nie zawsze da się zastosować. Ma też zaletę – sygnaturę formy można odczytać (czasami) ze wstępnych rachunków bez znajdowania bazy czy współrzędnych diagonalizujących.

Żeby rozpocząć diagonalizację potrzebujemy macierzy formy q w pewnej bazie. Jeśli forma jest zdegenerowana, bazę należy wybrać tak, aby końcowe wektory rozpinały jądro q, tzn. jeśli $\operatorname{rk} q = m$ to $\ker q = \langle e_{m+1},\dots,e_n\rangle$. Wtedy macierz formy ma postać

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ Q_{m1} & Q_{m2} & \cdots & Q_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dalej procedura dotyczy jedynie przestrzeni rozpiętej przez $(e_1,\dots,e_m)$ czyli pracujemy z podmacierzą zaznaczoną na fioletowo. Na przestrzeni $\langle e_1,\dots,e_m\rangle$ forma jest niezdegenerowana, zatem dalej będziemy zakładać, że pracujemy z niezdegenerowaną formą. Do powodzenia całej procedury potrzeba jeszcze jednego założenia. Niech D_k oznacza wyznacznik podmacierzy z indeksami mniejszymi bądź równymi k:

$$D_k = \det \begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{k1} & \cdots & Q_{kk} \end{bmatrix}$$

W dalszym ciągu zakładamy, że dla $i \leq m$ $D_i \neq 0$.

Krok po kroku skonstruujemy bazę diagonalizującą $f=(f_1,\dots,f_m)$

1) $f_1 = e_1$

2) W przestrzeni $\langle e_1,e_2\rangle = \langle f_1,e_2\rangle$ szukamy wektora f_2 takiego, że $Q(f_1,f_2)=0$

$$f_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \qquad Q(f_1,f_2) = Q(e_1, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = \lambda_1 Q_{11} + \lambda_2 Q_{12} = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{Q_{12}}{Q_{11}}\lambda_2$$ λ_2 można wziąć dowolne – wybieramy $\lambda_2 = 1$

$$f_2 = -\frac{Q_{12}}{Q_{11}} e_1 + e_2$$

$$Q(f_2,f_2) = Q\left(-\frac{Q_{12}}{Q_{11}}e_1 + e_2, -\frac{Q_{12}}{Q_{11}}e_1 + e_2\right) = Q\left(e_2, -\frac{Q_{12}}{Q_{11}}e_1 + e_2\right) = -\frac{Q_{12}}{Q_{11}}Q_{21} + Q_{22} =$$

$$= \frac{1}{Q_{11}}\left(Q_{22}Q_{11} - Q_{12}Q_{21}\right) = \frac{D_2}{D_1}$$

Gdybyśmy więc zaczęli pisać macierz $[q]_f$ to lewy górny róg miałby postać $\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{D_2}{D_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$

3) Zrobimy jeszcze rachunki dla punktu 3, a potem przejdziemy do ogólnego kroku indukcyjnego. W przestrzeni $\langle e_1,e_2,e_3\rangle = \langle f_1,f_2,e_3\rangle$ szukamy wektora f_3 takiego, że $Q(f_1,f_3)=0$ $Q(f_2,f_3)=0$. Okazuje się, że dobry będzie wektor

$$f_3 = \frac{1}{D_2}\det\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{D_2}\Big[e_1 \overbrace{(Q_{12}Q_{23} - Q_{13}Q_{22})}^{A_1} + e_2 \overbrace{(Q_{13}Q_{21} - Q_{11}Q_{23})}^{A_2} + e_3 \overbrace{(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21})}^{A_3}\Big]$$

Policzmy $Q(e_1,f_3)$ i $Q(e_2,f_3)$

$$Q(e_1,f_3)=\frac{1}{D_2}\left(Q(e_1, A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3\right)=\frac{1}{D_2}\left(Q_{11}A_1+Q_{12}A_2+Q_{13}A_3\right)=\frac{1}{D_2}\det\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}\\Q_{21}&Q_{22}&Q_{23}\\Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}\end{bmatrix}=0$$

$$Q(e_2,f_3)=\frac{1}{D_2}\left(Q(e_2, A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3\right)=\frac{1}{D_2}\left(Q_{21}A_1+Q_{22}A_2+Q_{23}A_3\right)=\frac{1}{D_2}\det\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}\\Q_{21}&Q_{22}&Q_{23}\\Q_{21}&Q_{22}&Q_{23}\end{bmatrix}=0$$

Skoro $f_1=e_1$ a $f_2\in\langle e_1,e_2\rangle$ to $Q(f_1,f_3)=0=Q(f_2,f_3)$

Policzmy $Q(f_3,f_3)$:

$$Q(f_3,f_3)=\frac{1}{D_2}\cdot\frac{1}{D_2}Q\left(A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3, A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3\right)=\frac{1}{D_2}\cdot\frac{1}{D_2}Q\left(A_3e_3, A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3\right)=$$

$A_3=D_2$

$$=\frac{1}{D_2}Q(e_3,A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)=\frac{1}{D_2}\det\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}\\Q_{21}&Q_{22}&Q_{23}\\Q_{31}&Q_{32}&Q_{33}\end{bmatrix}=\frac{D_3}{D_2}$$

mamy większy kawałek macierzy.

$$\begin{bmatrix}D_1&0&0&\cdots\\0&\frac{D_2}{D_1}&0&\cdots\\0&0&\frac{D_3}{D_2}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}$$

(k) Mając k-1 wektorów $(f_1,\dots,f_k)$ takich, że $\langle f_1,\dots,f_k\rangle=\langle e_1,\dots,e_k\rangle$ i $Q(f_i,f_j)=0$ dla $i\neq j$ konstruujemy

$f_k=\frac{1}{D_{k-1}}(A_1e_1+\dots+A_ke_k)$ gdzie A_i jest dopełnieniem algebraicznym wyrazu Q_{ik} w podmacierzy q dla indeksów $\leq k$

Wtedy, podobnie jak w przypadku (3) mamy dla $i<k$

$$Q(e_i,f_k)=\frac{1}{D_{k-1}}\det\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&\cdots&Q_{1k}\\Q_{21}&Q_{22}&\cdots&Q_{2k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\Q_{k-1\,1}&Q_{k-1\,2}&\cdots&Q_{k-1\,k}\\Q_{i1}&Q_{i2}&\cdots&Q_{ik}\end{bmatrix}=0$$ zatem $Q(f_i,f_k)=0$

Dla $Q(f_k,f_k)$ dostajemy

$$Q(f_k,f_k)=\frac{1}{D_{k-1}^2}Q\left(\Sigma A_ie_i,\Sigma A_ie_i\right)=$$

$$=\frac{1}{D_{k-1}^2}Q\left(A_ke_k,\Sigma A_ie_i\right)=\frac{1}{D_{k-1}}\Sigma A_kQ_{ki}=$$

$A_k=D_{k-1}$

$$=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&\cdots&Q_{1k}\\Q_{21}&Q_{22}&\cdots&Q_{2k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\Q_{k-1\,1}&Q_{k-1\,2}&\cdots&Q_{k-1\,k}\\Q_{k1}&Q_{k2}&\cdots&Q_{kk}\end{bmatrix}=\frac{D_k}{D_{k-1}}$$

m) Po wykonaniu m-tego kroku mamy bazę $(f_1, \dots, f_m)$ i macierz postaci
$$[q]_f = \operatorname{diag}\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_m}{D_{m-1}}\right)$$

Sygnaturę odczytujemy licząc dodatnie i ujemne wyrazy w ciągu $\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \dots, \frac{D_m}{D_{m-1}}\right)$. W szczególności jeśli wszystkie wyznaczniki są dodatnie to q jest dodatnie. Jeśli q jest niezdegenerowana dodatkowo, to jest dodatnio określona. Jeśli wyznaczniki mają znaki na zmianę począwszy od ujemnego, tzn $\operatorname{sgn} D_i = (-1)^i$ to forma jest ujemna, jeśli niezdegenerowana to ujemnie określona.

Do wyznaczenia sygnatury nie potrzebujemy bazy f ani odpowiadających jej współrzędnych. Wystarczają same wyznaczniki. Przy założeniu, oczywiście, że są niezerowe.

STRUKTURA ENDOMORFIZMU LINIOWEGO

W wykładzie 7 w zeszłym semestrze pojawił się przykład w którym należało policzyć A^n dla pewnej macierzy 2x2. Chodziło wtedy o znalezienie jawnego wzoru na n-ty wyraz ciągu danego rekurencyjnie:

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \qquad x_0 = 1,\ x_2 = 3.$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A \cdot A \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix} = \dots = \underbrace{A \cdots A}_{n-2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = A^{n-2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A^n policzyliśmy zamieniając bazę w $\mathbb{R}^2$ w taki sposób, żeby macierz A była diagonalna. W wykładzie 7 ta nowa baza była podana, ale jak ją znaleziono?

PRZYKŁAD: Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 2y \\ \dot{y} &= 3x - 5y \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = M\vec{r}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \dot{\vec{r}}(t)\,dt = \vec{r}_0 + \int_0^t M\vec{r}(t)\,dt$$

Równanie różniczkowe zastępujemy całkowym. Rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń.

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t M\vec{r}_0\,dt = \vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \int_0^t M(\vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t)\,dt = \vec{r}_0 + \int_0^t (M\vec{r}_0 + M^2\vec{r}_0 t)\,dt =$$

$$= \vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t + \frac{1}{2}M^2 t^2 \vec{r}_0 \qquad \vec{r}_3 = \vec{r}_0 + \int_0^t M\left(\vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t + \frac{1}{2}M^2\vec{r}_0 t^2\right)dt = \vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t + \frac{1}{2}M\vec{r}_0 t^2 + \frac{1}{3!}M^3\vec{r}_0 t^3$$

$$\circ\circ\circ \qquad \vec{r}_n = \vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t + \frac{1}{2}M\vec{r}_0 t^2 + \dots + \frac{1}{n!}M^n\vec{r}_0 t^n$$

$$\vec{r}_n = \left(\mathbb{1} + Mt + \frac{1}{2}M^2t^2 + \frac{1}{3!}M^3t^3 + \dots + \frac{1}{n!}M^n t^n\right)\vec{r}_0$$

$$\vec{r}(t) = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^kM^k\right)\vec{r}_0 = e^{tM}\vec{r}_0$$

czy ta granica istnieje? Okazuje się, że tak (patrz Analiza)

DEFINICJA $\quad e^M := \mathbb{1} + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots + \frac{1}{k!}M^k + \dots$

PROBLEM: Jak to obliczyć? Gdyby udało nam się to obliczyć dostalibyśmy ogólne rozwiązanie układu równań. Widać, że musimy umieć wyznaczać nie tylko wartości wielomianów na macierzach.
Za wyznaczanie e^M można się zabrać tak, jak za wyznaczanie A^n. Zapiszmy M w innej, wygodniejszej bazie. Najlepiej, żeby M była w tej bazie diagonalna. Macierz diagonalna działa na wektory bazy standardowej mnożąc je przez odpowiednie liczby na diagonali

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix}$$

Szukamy zatem wektorów $v \in V$ i liczb $\lambda \in \mathbb{R}$ takich, że $Mv = \lambda v$

$Mv = \lambda v \Rightarrow Mv - \lambda v = 0$ $\quad (M - \lambda\mathbb{1})v = 0$ Jeśli $v \neq 0$ istnieje to znaczy, że rząd macierzy $M - \lambda\mathbb{1}$ nie jest maksymalny, $\ker(M-\lambda\mathbb{1}) \neq \{0\}$ Jakie λ wchodzą w grę? To można sprawdzić licząc $\det(M-\lambda\mathbb{1})$ i przyrównując do 0:

$$0 = \det(M-\lambda\mathbb{1}) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -5\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 3 & -5-\lambda\end{bmatrix} = (2-\lambda)(-5-\lambda) + 6 =$$

$$= -10 + 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda+4)(\lambda-1)$$

wielomian charakterystyczny M

$\lambda = -4$ lub $\lambda = 1$

wartości własne M

Sprawdzimy, czy dla danych wartości λ znajdziemy v

$$\lambda=-4 \quad \ker\begin{bmatrix} 2+4 & -2 \\ 3 & -5+4\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 3 & -1\end{bmatrix} = \left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 3\end{bmatrix}\right\rangle$$

wektory własne

$$\lambda=1 \quad \ker\begin{bmatrix} 2-1 & -2 \\ 3 & -5-1\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 1 & -2\end{bmatrix} = \left\langle\begin{bmatrix} 2 \\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$$

baza diagonalizująca $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3\end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1\end{bmatrix}$

$$[M]_v^v = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad [id]_v^e = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1\end{bmatrix} = Q \quad [id]_e^v = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1\end{bmatrix} = Q^{-1}$$

$$M = Q\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}Q^{-1} \quad M^n = Q[\ \ ]Q^{-1}Q[\ \ ]Q^{-1}\cdot\ldots\cdot Q[\ \ ]Q^{-1} = Q\begin{bmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & 1^n\end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$e^{tM} = \mathbb{1} + tM + \frac{1}{2}t^2M^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^nM^n + \dots = Q\cdot Q^{-1} + tQ\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}Q^{-1} + \frac{1}{2}t^2Q\begin{bmatrix}(-4)^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}Q^{-1} +$$
$$+ \dots + \frac{1}{n!}t^nQ\begin{bmatrix}(-4)^n & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}Q^{-1} + \dots =$$
$$= Q\left(\mathbb{1} + \begin{bmatrix}-4t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(-4)^2t^2 & 0\\ 0 & t^2\end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{n!}\begin{bmatrix}(-4)^nt^n & 0\\ 0 & t^n\end{bmatrix} + \dots\right)Q^{-1} =$$
$$= Q\begin{bmatrix}e^{-4t} & 0\\ 0 & e^t\end{bmatrix}Q^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-4t} & 0\\ 0 & e^t\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}e^{-4t} & 2e^t\\ 3e^{-4t} & e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-e^{-4t}+6e^t & 2e^{-4t}-2e^t\\ -3e^{-4t}+3e^t & 6e^{-4t}-e^t\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\left\{e^{-4t}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 6\end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix}6 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right\}$$

Oznaczmy $x(0)=x_0$ $y(0)=y_0$ wtedy

$$x(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-4t}(2y_0-x_0) + e^t(6x_0-2y_0)\right) = \frac{1}{5}\left[x_0\left(6e^t - e^{-4t}\right) + y_0\left(2e^{-4t} - 2e^t\right)\right]$$
$$y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-4t}(-3x_0+6y_0) + e^t(3x_0-y_0)\right) = \frac{1}{5}\left[x_0\left(-3e^{-4t}+3e^t\right) + y_0\left(6e^{-4t} - e^t\right)\right]$$

Wytrwali mogą sprawdzić, że powyższe funkcje rzeczywiście spełniają wyjściowy układ równań. W dalszym ciągu wykładu będziemy zajmować się strukturą endomorfizmów liniowych, czyli będziemy szukać takich baz w przestrzeni wektorowej, żeby macierz endomorfizmu w danej bazie była możliwie najwygodniejsza. Pozwala to lepiej zrozumieć działanie endomorfizmów liniowych na przestrzeni wektorowej. Nie zawsze bowiem jest tak, że da się znaleźć bazę diagonalizującą.

Zanim zajmiemy się endomorfizmami w ogólności wprowadzimy trochę przydatnych oznaczeń i pojęć: Przestrzeń endomorfizmów liniowych przestrzeni wektorowej V oznaczamy $\mathrm{End}\, V$.

OPERATORY RZUTOWE

Przy okazji omawiania rozkładu przestrzeni na sumę prostą używaliśmy szczególnego rodzaju odwzorowań liniowych: Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$ to każdy wektor rozkłada się jednoznacznie na sumę $v = v_1 + v_2$ gdzie $v_i \in V_i$.
Można więc zdefiniować dwa endomorfizmy liniowe

$v \longmapsto v_1$ rzut na V_1 wzdłuż V_2, oznaczenie $P^{V_2}_{V_1}$ ⟵ górny indeks będziemy czasem pomijać, jeśli będzie wiadomo z jaką sumą prostą pracujemy

$v \longmapsto v_2$ rzut na V_2 wzdłuż V_1 $\quad P^{V_1}_{V_2}$

Operatory $P^{V_2}_{V_1}$ i $P^{V_1}_{V_2}$ mają szczególną własność. Otóż

$$\left(P^{V_2}_{V_1}\right)^2 = P^{V_2}_{V_1}, \quad \left(P^{V_1}_{V_2}\right)^2 = P^{V_1}_{V_2}$$

Okazuje się że zachodzi następujące stwierdzenie:

STWIERDZENIE: Jeśli $P \in \mathrm{End}(V)$ i $P^2 = P$ to $V = \ker P \oplus \mathrm{im}\, P$ oraz P jest rzutem na $\mathrm{im}\, P$ wzdłuż $\ker P$.