ALGEBRA R 18

STRUKTURA ENDOMORFIZMU

- operatory rzutowe cd
- ślad i wyznacznik operatora
- tw. Cayley'a - Hamiltona

Układ odwzorowań $P_1, \dots, P_k$ spełniający warunki jak wyżej, czyli $P_1 + \dots + P_k = id_V$, $P_i P_j = 0$ dla $i \neq j$ nazywa się **rzutowy rozkład jedności**. Zgodnie ze stwierdzeniem, rzutowy rozkład jedności definiuje rozkład V na sumę prostą k-podprzestrzeni.

W badaniu struktury endomorfizmu liniowego przydaje się możliwość obcięcia odwzorowania do mniejszej podprzestrzeni. Ma to sens wtedy kiedy działanie operatora nie wyprowadza poza tę podprzestrzeń. Mówimy, że podprzestrzeń $W \subset V$ jest **niezmiennicza ze względu na $F \in End\,V$** jeśli $F(W) \subset W$.

Załóżmy teraz, że W jest niezmiennicza ze względu na F. Konstruujemy bazę $e = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ w taki sposób, aby $W = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$. Wtedy macierz F ma postać

$$[F]_e^e = \begin{array}{c} k\,\{ \\ n-k\,\{ \end{array} \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$$
$$\qquad\qquad \underbrace{}_{k}\ \underbrace{}_{n-k}$$

Najlepsza sytuacja jest wtedy gdy istnieje dopełniająca przestrzeń niezmiennicza, tzn gdy $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ można dobrać tak aby $U = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ też miała własność $F(U) \subset U$.

Wtedy $V = W \oplus U$ rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych i $*$ też jest 0

STWIERDZENIE: $F \in End(V)$ V rozkłada się na sumę prostą $V_1 \oplus V_2$ podprzestrzeni niezmienniczych względem F wtedy i tylko wtedy gdy istnieje rzutowy rozkład jedności P_1, P_2 taki, że $FP_1 = P_1F$ i $FP_2 = P_2F$ (tzn $[P_1, F] = 0$, $[P_2, F] = 0$)

DOWÓD: $\Rightarrow$ Zgodnie z założeniem V_1 i V_2 są podprzestrzeniami niezmienniczymi dla F oraz $V_1 \oplus V_2 = V$. Weźmy (P_1, P_2) – rzutowy rozkład jedności związany z rozkładem V na sumę prostą. Wiadomo, że $P_1|_{V_1} = id_{V_1}$, podobnie $P_2|_{V_2} = id_{V_2}$

Weźmy $v \in V$ i zapiszmy $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$

$$FP_1 v = FP_1(v_1 + v_2) = \underset{\substack{\cap \\ V_1}}{Fv_1} = id_{V_1} Fv_1 = P_1 F v_1 = P_1(Fv_1 + \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{Fv_2}) = P_1 F v$$

podobnie dla P_2

$$FP_2 v = FP_2(v_1 + v_2) = Fv_2 = id_{V_2} Fv_2 = P_2 F v_2 = P_2(Fv_1 + Fv_2) = P_2 F v$$

$\Leftarrow$ Załóżmy teraz że (P_1, P_2) jest rzutowym rozkładem jedności takim że $P_iF = FP_i$. Rzutowy rozkład jedności jest zawsze związany z rozkładem V na sumę prostą $V = V_1 \oplus V_2$. Pokażemy, że V_1 i V_2 są niezmiennicze.

Weźmy dowolne $v \in V_1$: $Fv = FP_1 v = P_1 F v \in \operatorname{im} P_1 = V_1$

Podobnie weźmy $w \in V_2$: $Fw = FP_2 w = P_2 F w \in \operatorname{im} P_2 = V_2$. ■

Stwierdzenie podobne do powyższego tylko z wieloma składnikami sumy prostej także jest prawdziwe. Zapiszemy je, ale nie będziemy dowodzić. Dowód nie różni się od tego dla $k=2$

STWIERDZENIE: $F \in \operatorname{End}(V)$ V rozkłada się na sumę prostą $\bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ podprzestrzeni niezmienniczych względem F wtedy i tylko wtedy gdy istnieje rzutowy rozkład jedności $(P_1, \dots, P_k)$ taki, że $FP_i = P_i F$

Nasza strategia poszukiwania bazy w której operator F ma możliwie prostą postać (macierz blokowa, być może diagonalna ...) będzie polegała na poszukiwaniu podprzestrzeni niezmienniczych. Tylko skąd je wziąć?

WYZNACZNIK I ŚLAD OPERATORA

W pierwszym semestrze zdefiniowaliśmy pojęcie wyznacznika macierzy kwadratowej. Okazuje się że wyznacznik jest dobrze zdefiniowany dla endomorfizmów dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej

STWIERDZENIE: $F \in \operatorname{End}(V)$, e, f - bazy w V

$$\det\left([F]_e^e\right) = \det\left([F]_f^f\right)$$

DOWÓD: $[F]_e^e = [id_V]_f^e \, [F]_f^f \, [id_V]_e^f$ oznaczmy $Q = [id_V]_e^f$, wtedy $Q^{-1} = [id_V]_f^e$

$$\det\left([F]_e^e\right) = \det\left(Q^{-1} [F]_f^f \, Q\right) = \underbrace{\det Q^{-1}}_{= \frac{1}{\det Q}} \det\left([F]_f^f\right) \det Q = \det\left([F]_f^f\right)$$ ■

DEFINICJA: $F \in \operatorname{End}(V)$ e - baza w V $\det F = \det\left([F]_e^e\right)$

W przykładzie rozpoczynającym nasze rozważania o strukturze endomorfizmu liniowego wprowadziliśmy pojęcie wielomianu charakterystycznego macierzy wzorem $w_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ gdzie $A \in \mathbb{K}^n{}_n$

Korzystając z definicji wyznacznika operatora formułujemy

DEFINICJA: $F \in \operatorname{End} V$ wielomianem charakterystycznym operatora F nazywamy wielomian

$$w_F(\lambda) = \det\left(F - \lambda\, id_V\right) \qquad \deg w_F = \dim V.$$

Kolejną operację, którą można uogólnić z macierzy na operatory jest branie śladu:

DEFINICJA: $A \in \mathbb{K}^n_n$ $A = [a^i_j]$ $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a^i_i$ tzn ślad jest sumą wyrazów diagonalnych macierzy A.

STWIERDZENIE $A, B \in \mathbb{K}^n_n$ $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$

DOWÓD:

Niech $A = [a^i_j]$ $B = [b^k_l]$ $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$

$$(AB)^i_j = \sum_{k=1}^{n} a^i_k b^k_j$$

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{n} (AB)^i_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a^i_k b^k_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b^k_i a^i_k = \sum_{k=1}^{n} (BA)^k_k = \operatorname{tr}(BA)$$ ■

Oczywistym uogólnieniem powyższego stwierdzenia jest wzór

$\operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k) = \operatorname{tr}(A_k A_1 A_2 \cdots A_{k-2} A_k)$, czyli pod śladem można przestawiać cyklicznie.

STWIERDZENIE $F \in \operatorname{End} V$, e, f - bazy w V

$$\operatorname{tr}([F]^e_e) = \operatorname{tr}([F]^f_f)$$

DOWÓD:

Użyjemy oznaczeń jak poprzednio: $Q = [id_V]^f_e$

$$\operatorname{tr}([F]^e_e) = \operatorname{tr}(Q^{-1} [F]^f_f Q) = \operatorname{tr}(\underbrace{Q Q^{-1}}_{\mathbb{1}} [F]^f_f) = \operatorname{tr}([F]^f_f)$$ ■

Korzystając z powyższego twierdzenia formułujemy definicję

DEFINICJA: $F \in \operatorname{End} V$ $\operatorname{tr} F = \operatorname{tr}([F]^e_e)$ gdzie e jest dowolną bazą w V.

Podstawą wszelkiej dalszej metafizyki będzie bardzo ważne twierdzenie

TWIERDZENIE (CAYLEY, HAMILTON)

$F \in \operatorname{End} V$ $\quad w_F(F) = 0$

DOWÓD: Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że F jest macierzą $n \times n$, co nie umniejsza ogólności

$F \in \mathbb{K}^n_n$ $\quad w_F(\lambda) = \det(F - \lambda \mathbb{1})$

macierz dopełnień algebraicznych

Wiadomo, że dla dowolnej macierzy $X \in \mathbb{K}^n_n$ zachodzi wzór $X^D X = \det X \cdot \mathbb{1}$

$X^D X = (\det X)\mathbb{1}$ Jako X podstawiamy $X = F - \lambda\mathbb{1}$:

$$\underbrace{(F-\lambda\mathbb{1})^D}_{\text{to jest macierz, której wyrazami są wielomiany zmiennej } \lambda \text{ stopnia } \leq n-1}(F-\lambda\mathbb{1}) = \underbrace{\det(F-\lambda\mathbb{1})}_{\omega_F(\lambda)}\cdot\mathbb{1} = \omega_F(\lambda)\cdot\mathbb{1}$$

Oto przykładowa macierz z wielomianowymi wyrazami:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 2\lambda^2+\lambda-3 \\ \lambda+2 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$$ można ją przepisać następująco:

$$\lambda^2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

tzn. jako wielomian o współczynnikach macierzowych.

$(F-\lambda\mathbb{1})^D$ można przepisać jako

$$(F-\lambda\mathbb{1})^D = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots + \lambda^{n-1}B_{n-1}$$ dla pewnych macierzy B_i.

Mamy więc równość

$$\underbrace{(B_0 + \lambda B_1 + \dots + \lambda^{n-1}B_{n-1})(F-\lambda\mathbb{1})}_{\parallel} = \overbrace{\omega_F(\lambda)}^{(c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n)\mathbb{1}}\cdot\mathbb{1}$$

$$B_0F + \lambda B_1 F + \dots + \lambda^{n-1}B_{n-1}F - \lambda B_0 - \lambda^2 B_1 - \dots - \lambda^n B_{n-1} =$$
$$= B_0F + \lambda(B_1F - B_0) + \lambda^2(B_2F - B_1) + \dots + \lambda^{n-1}(B_{n-1}F - B_{n-2}) - \lambda^n B_{n-1}$$

Porównujemy wyrazy różowe i niebieskie przy jednakowych potęgach

$$\begin{aligned}
B_0F &= c_0\cdot\mathbb{1} \\
B_1F - B_0 &= c_1\mathbb{1} \quad /\cdot F \\
B_2F - B_1 &= c_2\mathbb{1} \quad /\cdot F^2 \\
&\vdots \\
B_{n-1}F - B_{n-2} &= c_{n-1}\mathbb{1} \quad /\cdot F^{n-1} \\
-B_{n-1} &= c_n\mathbb{1} \quad /\cdot F^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cancel{B_0F} &= c_0\mathbb{1} \\
\cancel{B_1F^2} - \cancel{B_0F} &= c_1F \\
B_2F^3 - \cancel{B_1F^2} &= c_2F^2 \\
&\vdots \\
\cancel{B_{n-1}}F^n - \cancel{B_{n-2}}F^{n-1} &= c_{n-1}F^{n-1} \\
+ \quad -\cancel{B_{n-1}}F^n &= c_nF^n \\
\hline
0 &= \omega_F(F)
\end{aligned}$$

■

ROZKŁAD NA PODPRZESTRZENIE PIERWIASTKOWE

Możemy teraz połączyć wiedzę na temat rzutów i rzutowego rozkładu jedności z pojęciem wielomianu charakterystycznego i ogólną wiedzę dotyczącą wielomianów i skonstruować możliwie drobny rozkład przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych. W dalszym ciągu pracować będziemy na przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$.

Ustalmy $F \in End(V)$, $\dim V = n$, w_F jest wielomianem charakterystycznym. Z podstawowego twierdzenia algebry wynika, że w_F rozkłada się na iloczyn postaci

$$w_F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

Zbiór $Sp(F) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ nazywamy spektrum operatora F, liczby $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ to wartości własne operatora F a liczby $k_1, \ldots, k_r$ to krotności odpowiednich wartości własnych. Oznaczamy

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{w_F(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}}$$

Największy wspólny dzielnik φ_i jest wielomianem stałym, zatem istnieje układ wielomianów $w_1, \ldots, w_r$ taki, że

$$w_1\varphi_1 + w_2\varphi_2 + \cdots + w_r\varphi_r = 1$$

Zdefiniujmy operatory $P_i := w_i(F)\varphi_i(F)$. Mamy

(1) $P_1 + P_2 + \cdots + P_r = w_1(F)\varphi_1(F) + w_2(F)\varphi_2(F) + \cdots + w_r(F)\varphi_r(F) = \mathbb{1}$

(2) $P_i P_j = w_i(F)\varphi_i(F) w_j(F)\varphi_j(F) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dla } i \neq j}}{=} v(F) w_F(F) = 0$

zatem $(P_1, \ldots, P_r)$ jest rzutowym rozkładem jedności. Zgodnie ze stosownym twierdzeniem istnieje dla niego odpowiedni rozkład na sumę prostą

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r \quad \text{gdzie} \quad V_i = \operatorname{im} P_i$$

Składniki sumy prostej są niezmiennicze dla F, bo wszystkie rzuty P_i obliczamy jako wartości pewnych wielomianów od F, zatem $[F, P_i] = 0$.

Zanim zastanowimy się jaki jest wymiar V_i i czy nie można by jej jakoś łatwiej wyznaczyć zróbmy przykład rachunkowy:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad w_T(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \quad Sp(T) = \{1, 2\} \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{w_T(\lambda)}{(\lambda-1)^2} = -(\lambda-2) = (2-\lambda) \qquad \varphi_2(\lambda) = \frac{w_T(\lambda)}{(\lambda-2)} = -(\lambda-1)^2$$