ALGEBRA R 21

STRUKTURA ENDOMORFIZMU

- rozkład $F = D + N$ c.d.
- funkcje od operatora

równa $\dim \ker N_i = \dim \ker(F - \lambda_i \, id)$ czyli wymiarowi podprzestrzeni własnej dla wartości własnej λ_i. W bazie odpowiedniej dla operatora N_i macierz $F|_{V_i}$ ma postać blokową a bloki są postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Zbierając razem elementy baz na przestrzeniach V_i w jedną bazę przestrzeni V otrzymujemy bazę Jordana przestrzeni V dla operatora F. Macierz operatora w tej bazie nazywa się postacią Jordana operatora F.

Dodatkowo możemy każdy z operatorów N_i rozszerzyć z V_i na V kładąc 0 na pozostałych składnikach sumy prostej. Takie rozszerzenie oznaczmy $\bar{N}_i$. Innymi słowy $\bar{N}_i = N_i P_i$, podobnie $\bar{D}_i = D_i P_i = \lambda_i P_i$.

$$F = \bar{N}_1 + \bar{D}_1 + \bar{N}_2 + \bar{D}_2 + \dots + \bar{N}_p + \bar{D}_p = \underbrace{(\bar{D}_1 + \dots + \bar{D}_p)}_{D} + \underbrace{(\bar{N}_1 + \dots + \bar{N}_p)}_{N} = D + N$$

gdzie D jest diagonalizowalny a N nilpotentny. Prawdziwe jest twierdzenie:

TWIERDZENIE Każdy endomorfizm F skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej rozkłada się na sumę $F = D + N$ operatorów diagonalizowalnego i nilpotentnego, takich, że $[D, N] = 0$. Rozkład ten jest jednoznaczny.

DOWÓD Właściwie niewiele już zostało do udowodnienia: Pokazaliśmy że przestrzeń V rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych dla operatora F. Każda z tych podprzestrzeni jest podprzestrzenią pierwiastkową. Na podprzestrzeni pierwiastkowej F można rozłożyć na sumę operatora diagonalnego (mnożenie przez wartość własną) i nilpotentnego. Operatory te, rozszerzone przez zero na pozostałych składnikach sumy zbierają się do operatora diagonalizowalnego i nilpotentnego na V: $F = D + N$. Pozostaje wykazanie, że operatory te komutują, oraz że rozkład jest jednoznaczny.

Przemienność D i F wynika z faktu, że D_i i N_i (w poprzednich oznaczeniach) są przemienne na V_i. D_i jest proporcjonalny do identyczności na V_i, zatem jest przemienny ze wszystkimi operatorami na V_i. Podprzestrzenie V_i są niezmiennicze także dla D_i i N_i, i co za tym idzie, dla D i N, zatem przemienność D_i i N_i skutkuje przemiennością D i N.

Jednoznaczność rozkładu: Niech $F = D + N$. Skoro operator D jest diagonalizowalny to jego podprzestrzenie pierwiastkowe są jednocześnie własne. Niech $\lambda \in Sp(D)$ i niech $V(\lambda)$ będzie podprzestrzenią własną dla D

$v \in V(\lambda)$ $Dv = \lambda v$ wtedy $V(\lambda)$ jest niezmiennicza dla F:

$D(F(v)) = F(D(v)) = F(\lambda v) = \lambda F(v)$ tzn $F(v) \in V(\lambda)$. Skoro $N = F - D$, to $V(\lambda)$ jest też niezmiennicza dla N.

Weźmy znowu $v \in V(\lambda)$ $F(v) = D(v) + N(v) = \lambda v + N(v)$ $(F - \lambda \, id) v = N(v)$

$(F-\lambda id)v = N(v)$ ale N jest nilpotentny, więc dla dla wystarczająco dużego m mamy $0 = N^m(v) = (F-\lambda id)^m v$. Stąd wniosek, że $\ker(F-\lambda id)$ jest nietrywialne, zatem $\lambda \in Sp(F)$ oraz, że $V(\lambda)$ jest zawarte w podprzestrzeni pierwiastkowej dla operatora F i wartości własnej λ.

Dotyczy to każdej wartości własnej operatora D. Wiadomo też, że V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych D i podprzestrzeni pierwiastkowych F, każda własna dla D zawiera się w pierwiastkowej dla F. Nie ma więc innej możliwości jak tylko przestrzeń własna dla D jest równa odpowiedniej pierwiastkowej dla F. Oznacza to że jeśli $Sp(F) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ i P_i jest odpowiednim rzutem na V_i to $D = \sum_i \lambda_i P_i$ i jest jednoznacznie określone. W tej sytuacji $N = F - D$ też jest jednoznacznie określone ■

Zauważmy dodatkowo, że operatory N i D można wyrazić jako wielomiany od F. Istotnie, wiemy że $P_i = u_i(F)\varphi_i(F)$ gdzie $\varphi_i(\lambda) = \omega_F(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$ oraz $\sum u_i \varphi_i = 1$

zatem
$$D = \sum_i \lambda_i P_i = \sum_i \lambda_i u_i(F)\varphi_i(F)$$
$$N = F - D = F - \sum_i \lambda_i u_i(F)\varphi_i(F)$$

FUNKCJE OD OPERATORÓW

Jak na razie mamy przyzwoicie zdefiniowane pojęcie wielomianu od operatora: $End(V)$ jest algebrą łączną z $\mathbb{1}$ nad ciałem $\mathbb{C}$ zatem możemy wstawić $F \in End(V)$ jako argument dowolnego wielomianu $w \in \mathbb{C}[\cdot]$.

Niech teraz f będzie funkcją analityczną na $\mathbb{C}$ (tzn zadaną zbieżnym szeregiem potęgowym) zakładać także będziemy, że $Sp\,F$ znajduje się w kole zbieżności szeregu.

Niech $w \in \mathbb{C}[\,]$. Wartość $w(F)$ możemy obliczyć wprost, albo korzystając z rozkładu $F = D + N$

Dla argumentów liczbowych $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda = t + h$ mamy
$$w(t+h) = w(t) + w'(t)h + \frac{1}{2!}w''(t)h^2 + \dots + \frac{1}{k!}w^{(k)}(t)h^k \quad \text{gdzie } k = \deg w$$

Dla argumentów operatorowych tak nie jest, bo np
$$(T+H)^3 = (T+H)(T+H)(T+H) = (T+H)(T^2+TH+HT+H^2) = T^3 + \underbrace{T^2H + THT + TH^2 + HT^2 + HTH + H^2T}_{} + H^3$$

nieprzemienność mnożenia operatorów powoduje, że nie da się tego uprościć

Jednak jeśli w miejsce T i H wstawimy D i N, które komutują, dostaniemy
$$(D+N)^3 = D^3 + D^2N + DND + DN^2 + ND^2 + NDN + N^2D + N^3 = D^3 + \boxed{3D^2N} + \boxed{3DN^2} + N^3$$

Pod względem rachunkowym możemy więc traktować przemienne operatory jak liczby

Niech teraz D będzie diagonalizowalny, tzn $D = \sum_i \lambda_i P_i$ gdzie P_i to rzuty na podprzestrzenie pierwiastkowe (własne) Te rzuty nazywają się rzuty spektralne
Pamiętamy że dla $i \neq j$ $P_i P_j = 0$, dlatego

$$D^2 = \left(\sum_i \lambda_i P_i \right)^2 = \sum_i \lambda_i^2 \underbrace{P_i^2}_{P_i} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \underbrace{P_i P_j}_{0} = \sum_i \lambda_i^2 P_i$$ 24

To samo zachodzi dla dowolnej potęgi

$$D^n = \left(\sum_i \lambda_i P_i \right)^n = \sum_i \lambda_i^n P_i$$

Naturalna jest więc definicja $f(D) = \sum_i f(\lambda_i) P_i$, istotnie

$$f(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n D^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n P_i = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_n \lambda_i^n \right) P_i = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i) P_i$$

Dla operatora niediagonalizowalnego $F = D + N$ użyjemy wzoru Taylora dla funkcji analitycznych

$$f(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \cdot \frac{1}{k!} h^k$$

gdy zamiast t wstawimy D i zamiast h wstawimy N, oraz przyjmiemy m jako stopień nilpotentności N otrzymamy

$$\underset{f(F)}{\overset{\parallel}{}} f(D+N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(D) N^k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(D) N^k =$$

$$= f(D) + f'(D) N + \frac{1}{2} f''(D) N^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)} N^{m-1}$$

Korzystamy tu z faktu, że f i wszystkie pochodne są analityczne i mają ten sam promień zbieżności, można je więc policzyć na D. Ponadto, de facto, każda taka suma jest skończona, bo N nilpotentny.

Praktycznie funkcje od operatora wyznacza się inaczej, w prostszy rachunkowo sposób. Definicja także bywa przydatna w niektórych przypadkach.

PRZYKŁAD:

Weźmy F jak poprzednio i policzmy $\cos\left(\frac{\pi}{2}F\right)$

$$F=\begin{bmatrix}3&-2&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

Potrzebujemy informacje o F:

$$\operatorname{Sp}F=\{1,2\}$$

k=2 (dla 2), k=1 (dla 1)

$$P_1=\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\qquad P_2=\begin{bmatrix}3&-3&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$D=1\cdot P_1+2\cdot P_2=\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&-6&0\\4&-4&0\\2&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3&0\\2&-1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$N=F-D=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Sprawdzamy nilpotentność (kontrola poprawności rachunków)

$$N^2=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(t+h)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot h\right)+\cdots=\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)h+\cdots$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}F\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}(D+N)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}D\right)-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}D\right)N$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}D\right)=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}P_1+\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)}_{-1}P_2=-P_2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}D\right)=\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}P_1+\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)}_{0}P_2=P_1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}F\right)=-P_2-\frac{\pi}{2}P_1\cdot N=\begin{bmatrix}-3&+3&0\\-2&+2&0\\-1&+1&0\end{bmatrix}-\frac{\pi}{2}\underbrace{\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}}=$$

$$=\begin{bmatrix}-3+\frac{\pi}{2}&3-\frac{\pi}{2}&-\frac{\pi}{2}\\-2+\frac{\pi}{2}&2-\frac{\pi}{2}&-\frac{\pi}{2}\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

PRAKTYCZNE WYZNACZANIE WARTOŚCI FUNKCJI OD OPERATORA

Mając wielomian zerujący operator liniowy (np wielomian charakterystyczny) możemy uprościć sobie rachunki w przypadku konieczności wyznaczenia wartości wielomianu wysokiego stopnia od operatora korzystając z dzielenia z resztą:

$F \in \mathrm{End}V$, $v \in \mathbb{C}[\cdot]$ wysokiego stopnia, $w \in \mathbb{C}[\cdot]$: $w(F) = 0$

$$v = q \cdot w + r \qquad \deg r < \deg w$$

$$v(F) = q(F)\underbrace{w(F)}_{=0} + r(F) = r(F)$$

Ostatecznie wystarczy liczyć wielomiany stopnia mniejszego niż $\deg w$. Okazuje się że dla funkcji analitycznych możemy użyć podobnego sposobu korzystając z następującego pożytecznych lematów

LEMAT 1 $w \in \mathbb{C}[\cdot]$ $w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ $k_i \in \mathbb{N}$
$\varphi : \vartheta \to \mathbb{C}$ analityczna $\vartheta \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ Równoważne są warunki

(1) istnieje funkcja analityczna $\sigma : \vartheta \to \mathbb{C}$ taka, że $\varphi = \sigma \cdot w$
(2) $\forall i \in \overline{1,r}$ $\forall k \in \overline{1, k_i - 1}$ $\varphi^{(k)}(\lambda_i) = 0$

ten pierwiastki wielomianu są zerami φ krotności k_i

DOWÓD:

$1 \Rightarrow 2$ oczywiste (różniczkowanie, reguła Leibniza)

$2 \Rightarrow 1$ na otoczeniu λ_1 funkcja φ ma rozwinięcie

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(\lambda_1)(\lambda - \lambda_1)^k = \sum_{k=k_1}^{\infty} \varphi^{(k)}(\lambda_1)(\lambda - \lambda_1)^k$$

$$\sigma(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{w(\lambda)} = \underbrace{\frac{1}{(\lambda-\lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}}}_{\text{analityczna}} \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \varphi^{(k_1 + l)}(\lambda_1)(\lambda - \lambda_1)^l}_{\text{analityczna}}$$

na otoczeniu λ_1

Podobnie możemy zrobić dla innych i $(\neq 1)$. Punkty λ_i są jedynymi „wpływowymi" punktami $\varphi(\lambda)/w(\lambda)$. Pokazaliśmy że na otoczeniu każdego z nich funkcja jest analityczna.

LEMAT 2 $w \in \mathbb{C}[\cdot]$ $w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ $k_i \in \mathbb{N}$
$\varphi : \vartheta \to \mathbb{C}$ analityczna $\vartheta \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

Istnieje dokładnie jeden wielomian $r \in \mathbb{C}[\cdot]$ i funkcja analityczna $\sigma : \vartheta \to \mathbb{C}$ taka że $\varphi = \sigma \cdot w + \rho$; $\deg \rho < \deg w$

DOWÓD Szukamy wielomianu ρ takiego, że $\varphi - \rho$ jest podzielne przez w.

Wiadomo wówczas, że funkcja $\varphi - \rho$ musi mieć zera rzędu k_i w punktach λ_i, czyli

$$(\varphi-\rho)^{(k)}(\lambda_i)=0 \quad \text{dla} \quad k \in \overline{0, k_i-1}$$

$(\varphi-\rho)^{(k)}(\lambda_i) = \varphi^{(k)}(\lambda_i) - \rho^{(k)}(\lambda_i)$ Wielomian r spełnia więc warunki

$$\rho^{(k)}(\lambda_i) = \underbrace{\varphi^{(k)}(\lambda_i)}_{\text{ustalone liczby } c_{k,i}} \quad \text{dla} \quad k \in \overline{0, k_i-1}$$

Niech $d = k_1 + \dots + k_r = \deg \omega$ formy liniowe $v \mapsto v^{(k)}(\lambda_i)$ na $\mathbb{C}_{d-1}[\cdot]$ są liniowo niezależne i jest ich d, zatem stanowią bazę $(\mathbb{C}_{d-1}[\cdot])^*$. Podanie ich wartości na wielomianie z $\mathbb{C}_{d-1}[\cdot]$ jednoznacznie określa ten wielomian. Innymi słowy równania

$$\rho^{(k)}(\lambda_i) = c_{k,i} \quad \text{definiuje } \rho \text{ jednoznacznie.}$$

■

PRZYKŁAD Weźmy F jak poprzednio i policzmy $\cos\left(\frac{\pi}{2}F\right)$ nową metodą

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \omega(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\lambda\right) = \sigma(\lambda)\omega(\lambda) + \rho(\lambda)$$

$\rho(1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad \rho(2) = \cos\pi = -1$ $\quad \rho'(1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)'\Big|_{\lambda=1} = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)\Big|_{\lambda=1} = -\frac{\pi}{2}$

$$\rho(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ 4a+2b+c &= -1 \\ 2a+b &= -\tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\rho(\lambda) = \left(\tfrac{\pi}{2}-1\right)\lambda^2 + \left(2-\tfrac{3\pi}{2}\right)\lambda + (\pi-1)$$

$$\begin{array}{r} 4a+2b+c = -1 \\ -\ 4a+2b = -\pi \\ \hline c = \pi - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b = 1-\pi \\ 2a+b = -\pi/2 \\ \hline a = \pi/2 - 1 \end{array}$$

$$b = 1 - \pi - \pi/2 + 1 = 2 - \tfrac{3\pi}{2}$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}F\right) = \left(\tfrac{\pi}{2}-1\right)F^2 + \left(2-\tfrac{3\pi}{2}\right)F + (\pi-1)\mathbb{1} = \tfrac{\pi}{2}\left[F^2 - 3F + 2\mathbb{1}\right] + \left[-F^2 + 2F - \mathbb{1}\right] =$$

$$\tfrac{\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -3+\frac{\pi}{2} & 3-\frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ -2+\frac{\pi}{2} & 2-\frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

OK