ALGEBRA R 22

STRUKTURA ENDOMORFIZMU

- kompleksyfikacja
- wielomian minimalny

A CO JEŚLI PRZESTRZEŃ WEKTOROWA JEST NAD $\mathbb{R}$?

Twierdzenia dotyczące rozkładu przestrzeni wektorowej na sumę prostą podprzestrzeni pierwiastkowych względem operatora liniowego obowiązują dla przestrzeni wektorowych nad $\mathbb{C}$. Założenie to jest konieczne aby zagwarantować, że wielomian charakterystyczny ma rozkład na czynniki liniowe. Cała teoria działa więc także jeśli przestrzeń jest nad $\mathbb{R}$ i operator F jest taki, że wielomian charakterystyczny rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na czynniki pierwszego stopnia. Co jednak robić jeśli V jest nad $\mathbb{R}$, $F \in End(V)$ i w_F ma pierwiastki zespolone?

KOMPLEKSYFIKACJA PRZESTRZENI WEKTOROWEJ: Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową. W $V \times V$ wprowadzamy mnożenie przez liczby $\mathbb{C}$:

$$(x+iy)(v,w) = (xv - yw,\ xw + yv)$$

Sprawdzamy, że $V\times V$ z dodawaniem po współrzędnych i mnożeniem jak wyżej jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. Oznaczamy ją $V^{\mathbb{C}}$. Łatwo zauważyć że

$$(0,w) = i(w,0) \quad (*)$$

Wobec tego jeśli $(e_1,\dots,e_n)$ jest bazą w V nad $\mathbb{R}$ to $((e_1,0),\dots,(e_n,0))$ rozpina $V^{\mathbb{C}}$. Liniowa niezależność tego układu jest łatwo sprawdzalna:

$$z_1(e_1,0)+\dots+z_n(e_n,0) = (x_1e_1, y_1e_1)+\dots+(x_ne_n, y_ne_n) = (0,0)$$

$$\Rightarrow x_1e_1+\dots+x_ne_n = 0 \text{ i } y_1e_1+\dots+y_ne_n = 0 \Rightarrow x_1=\dots=x_n=0 \text{ i } y_1=\dots=y_n=0$$

Układ $(e_1,0)\dots(e_n,0)$ jest bazą $V^{\mathbb{C}}$. $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$. Korzystając z $(*)$ zamiast (v,w) pisać będziemy $v+iw$. Przestrzeń wektorową $V^{\mathbb{C}}$ nazywamy kompleksyfikacją przestrzeni V.

Operator liniowy działający na V rozszerzyć można do operatora działającego na $V^{\mathbb{C}}$ wzorem

$$F^{\mathbb{C}}(v,w) = (Fv, Fw) \quad \left(\text{czyli } F^{\mathbb{C}}(v+iw) = Fv + iFw\right)$$

W $V^{\mathbb{C}}$ naturalna jest też operacja sprzężenia $V^{\mathbb{C}} \ni (v,w) \longmapsto (v,-w) \in V^{\mathbb{C}}$ (inaczej $\overline{v+iw} = v - iw$). Operacja ta spełnia znane wzory

$$\overline{\lambda u} = \bar\lambda\,\bar u \qquad \overline{u_1+u_2} = \bar u_1 + \bar u_2 \qquad \text{dla } u = v+iw,\ u_j = v+iw_j.$$

W $V^{\mathbb{C}}$ wyróżnione są podprzestrzenie wektorowe, które są kompleksyfikacjami rzeczywistych podprzestrzeni w V. Niech $W \subset V$, wtedy

$W^{\mathbb{C}} = \{v+iw : v\in W, w\in W\}$ łatwo sprawdzić, że jest to podprzestrzeń wektorowa w $V^{\mathbb{C}}$.

Oczywiście nie wszystkie podprzestrzenie są tego rodzaju. Np weźmy $u = v+iw$ dla v i w liniowo niezależnych w V. Wówczas $\langle u \rangle$ jest jednowymiarową podprzestrzenią w $V_1^{\mathbb{C}}$ która nie jest kompleksyfikacją żadnej podprzestrzeni V. Jeśli jednak rozważymy dwie przestrzenie $\langle u \rangle$ i $\langle \bar{u} \rangle$ możemy skonstruować podprzestrzeń będącą kompleksyfikacją

STWIERDZENIE: $u = v + iw$, v, w liniowo niezależne w V. Wówczas $u, \bar{u}$ są liniowo niezależne oraz $\langle u \rangle + \langle \bar{u} \rangle = \langle v, w \rangle^{\mathbb{C}}$

DOWÓD:

$$\lambda u + \mu \bar{u} = (\mathrm{Re}\lambda\, v - \mathrm{Im}\lambda\, w) + i(\mathrm{Im}\lambda\, v + \mathrm{Re}\lambda\, w) + (\mathrm{Re}\mu\, v + \mathrm{Im}\mu\, w) + i(\mathrm{Im}\mu\, v - \mathrm{Re}\mu\, w) =$$

$$\underbrace{(\mathrm{Re}\lambda + \mathrm{Re}\mu)}_{0} v + \underbrace{(\mathrm{Im}\mu - \mathrm{Im}\lambda)}_{0} w + i\left\{\underbrace{(\mathrm{Im}\lambda + \mathrm{Im}\mu)}_{0} v + \underbrace{(\mathrm{Re}\lambda - \mathrm{Re}\mu)}_{0} w\right\} = 0$$

$\mathrm{Re}\lambda = \mathrm{Re}\mu = 0$

$\mathrm{Im}\lambda = \mathrm{Im}\mu = 0$

Jednocześnie z powyższego rachunku widać że $\lambda u + \mu \bar{u}$ ma „część rzeczywistą" będącą kombinacją liniową v i w, podobnie „część urojoną". ■

Wróćmy teraz do operatora $F^{\mathbb{C}}$ działającego na $V^{\mathbb{C}}$: $F^{\mathbb{C}}(v + iw) = Fv + iFw$. Biorąc bazę $(e_1, 0) \dots (e_n, 0)$ w $V^{\mathbb{C}}$ pochodzącą od bazy $(e_1, \dots, e_n)$ możemy zapisać macierz $F^{\mathbb{C}}$. Łatwo widać że macierz $F^{\mathbb{C}}$ w takiej bazie jest identyczna z macierzą $[F]_e^e$ zatem $w_{F^{\mathbb{C}}}$ ma identyczną postać jak w_F. $V^{\mathbb{C}}$ jest przestrzenią nad $\mathbb{C}$ zatem $V^{\mathbb{C}}$ rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni pierwiastkowych dla $F^{\mathbb{C}}$. Zastanówmy się najpierw jak wyglądają podprzestrzenie pierwiastkowe dla rzeczywistych wartości własnych:

$\boxed{\lambda \in Sp(F),\ \lambda \in \mathbb{R}}$

Skoro $\lambda \in \mathbb{R}$ to podprzestrzeń $W(\lambda) = \ker(F - \lambda\, id_V)^{k_\lambda} \subset V$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla F. Jednocześnie istnieje $V(\lambda) \subset V^{\mathbb{C}}$ pierwiastkowa dla $F^{\mathbb{C}}$

$V(\lambda) = \ker(F^{\mathbb{C}} - \lambda \cdot id_{V^{\mathbb{C}}})^{k_\lambda}$

$$(v, w) \in V(\lambda) \Leftrightarrow (F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id)^{k_\lambda}(v, w) = 0 \overset{(**)}{=} \left((F - \lambda\, id_V)^{k_\lambda} v, (F - \lambda\, id_V)^{k_\lambda} w\right)$$

Można tak napisać gdyż $(F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}}) = (F - \lambda\, id_V)^{\mathbb{C}}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Istotnie

$$(F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}})(v, w) = F^{\mathbb{C}}(v, w) - \lambda(v, w) = (Fv, Fw) - (\lambda v, \lambda w) =$$

$$((F - \lambda\, id_V)v, (F - \lambda\, id_V)w) = (F - \lambda\, id_V)^{\mathbb{C}}(v, w)$$

Z warunku (**) wynika, że $(v,w)\in V(\lambda) \iff v\in W(\lambda)$ i $w\in W(\lambda)$. Ostatecznie $V(\lambda)=W(\lambda)\times W(\lambda)$ jako zbiór, a ze strukturą dostaniemy $V(\lambda)=W(\lambda)^{\mathbb{C}}$.

Przejdźmy teraz do zespolonych wartości własnych:

$\boxed{\lambda\in Sp(F^{\mathbb{C}}) \quad \lambda\in\mathbb{C}}$ Zauważmy, że jeśli $\lambda\in Sp(F^{\mathbb{C}})$ to także $\bar{\lambda}\in Sp(F^{\mathbb{C}})$. Obie wzajemnie sprzężone wartości własne mają te same krotności. Przyjrzyjmy się najpierw wektorom własnym dla $F^{\mathbb{C}}$ i wartości $\lambda, \bar{\lambda}$

(v,w) jest własny, tzn $F^{\mathbb{C}}(v,w)=(Fv,Fw)=(a+ib)(v,w)=(av-bw,\ aw+bv)$

$$\begin{cases} Fv = av-bw \\ Fw = aw+bv \end{cases}$$

Policzmy

$$F^{\mathbb{C}}(v,-w)=(Fv,-Fw)=(av-bw,\,-aw-bv)=(a-ib)(v,-w)$$

tzn $(v,-w)$ jest własny dla $\bar{\lambda}=a-ib$

Zauważmy dodatkowo, że wektory v i w są liniowo niezależne: gdyby $w=\mu v$ to mielibyśmy $Fv=av-b\mu v=(a-b\mu)v$ i v byłoby wektorem własnym dla wartości własnej $(a-b\mu)$. Wektor $(v,w)=(v,\mu v)$ byłby wtedy własny dla rzeczywistej w. własnej $(a-b\mu)$, co jest sprzeczne z założeniem! Jeśli więc $U(\lambda)$ oznacza przestrzeń własną dla zespolonej wartości własnej λ to $U(\bar{\lambda})=\overline{U(\lambda)}$

WNIOSEK 1 Jeśli (v,w) tzn $v+iw$ jest własny dla wartości własnej λ to $(v,-w)$ tzn $v-iw$ jest własny dla wartości własnej $\bar{\lambda}$. Operator F ma wówczas dwuwymiarową podprzestrzeń niezmienniczą rozpiętą przez v i w. Macierz F obciętego do tej podprzestrzeni ma postać $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a\end{bmatrix}$

WNIOSEK 2 Jeśli $U(\lambda)$ i $U(\bar{\lambda})$ są przestrzeniami własnymi dla λ i $\bar{\lambda}$ to $U(\lambda)+U(\bar{\lambda})$ jest kompleksyfikacją pewnej podprzestrzeni $W(\lambda,\bar{\lambda})\subset V$ niezmienniczej ze względu na F

$$U(\lambda)+U(\bar{\lambda}) = W(\lambda,\bar{\lambda})^{\mathbb{C}}$$

Mając bazę $(\underbrace{v_1+iw_1}_{u_1},\dots,\underbrace{v_m+iw_m}_{u_m})$ przestrzeni $U(\lambda)$ konstruujemy bazę $W(\lambda,\bar{\lambda})$

biorąc wektory $\quad v_i=\frac{1}{2}(u_i+\bar{u}_i) \quad$ i $\quad w_j=\frac{1}{2i}(u_i-\bar{u}_i)$

Wszystko co zrobiliśmy dla podprzestrzeni własnej obowiązuje także dla podprzestrzeni pierwiastkowej

STWIERDZENIE: Niech $F \in \mathrm{End}(V)$ będzie endomorfizmem rzeczywistej przestrzeni wektorowej mającym zespoloną wartość własną λ krotności k. Wówczas $\bar{\lambda} \in Sp(F)$ i

$V(\lambda) + V(\bar{\lambda}) = W(\lambda, \bar{\lambda})^{\mathbb{C}}$ dla pewnej rzeczywistej podprzestrzeni $W(\lambda\bar{\lambda}) \subset V$ wymiaru k oraz $W(\lambda, \bar{\lambda})$ jest niezmiennicza dla F.

DOWÓD: Jeśli V jest nad $\mathbb{R}$ to w_F ma rzeczywiste współczynniki, zatem jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem w_F krotności k to także $\bar{\lambda}$ jest pierwiastkiem w_F krotności k. W rozkładzie $V^{\mathbb{C}}$ na podprzestrzenie pierwiastkowe względem $F^{\mathbb{C}}$ są zatem podprzestrzenie $V(\lambda)$ i $V(\bar{\lambda})$ obie zespolonego wymiaru k

$v + iw \in V(\lambda)$ tzn $\left(F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right)^k (v + iw) = 0$

$$\left(F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right)(v+iw) = (Fv, Fw) - \lambda(v, w) = (Fv - xv + yw,\ Fw - yv - xw)$$

$$\overline{\left(F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right)(v+iw)} = (Fv - xv + yw,\ -Fw + yw + xw) \overset{=}{\longleftarrow}$$

$$\left(F^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right)(v-iw) = (Fv, -Fw) - \bar{\lambda}(v, -w) = (Fv - xv + yw,\ -Fw + xw + yv)$$

$$\overline{\left(F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right)(v+iw)} = \left(F^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right)\overline{(v+iw)}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\left(F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right)^k (v+iw)} = \left(F^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right)^k \overline{(v+iw)}$$

tzn jeśli $v + iw \in V(\lambda)$ to $v - iw \in V(\bar{\lambda})$ (i odwrotnie)

Pokazaliśmy de facto że $V(\lambda)$ i $V(\bar{\lambda})$ są wzajemnie sprzężone! W takiej sytuacji $V(\lambda) + V(\bar{\lambda})$ jest kompleksyfikacją pewnej rzeczywistej przestrzeni $W(\lambda, \bar{\lambda})$:

$$V(\lambda) + V(\bar{\lambda}) = W(\lambda, \bar{\lambda})^{\mathbb{C}}$$

Pokażemy teraz, że $W(\lambda, \bar{\lambda})$ jest niezmiennicza ze względu na F. Z ogólnej teorii wiadomo że istnieje baza $V(\lambda)$ złożona z N-serii, gdzie $N = F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}}$. Weźmy N-serię $u_1 \dots u_k$, tzn $u_{i+1} = N u_i$; $N u_k = 0$. Wtedy $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k$ jest $\bar{N}$-serią, gdzie $\bar{N}$ oznacza $F^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}\, id_{V^{\mathbb{C}}}$. Mamy $u_j = v_j + i w_j$

$$N u_j = u_{j+1} \quad \left(F^{\mathbb{C}} - \lambda\, id_{V^{\mathbb{C}}}\right) u_j = u_{j+1} \quad F^{\mathbb{C}} u_j = u_{j+1} + \lambda u_j$$

$$F^{\mathbb{C}} u_j = (F v_j, F w_j) \quad (F v_j, F w_j) = (v_{j+1}, w_{j+1}) + (x + iy)(v_j, w_j) = (v_{j+1} + x v_j - y w_j,\ w_{j+1} + y v_j + x w_j)$$

$$F v_j = v_{j+1} + x v_j - y w_j$$

$$F w_j = w_{j+1} + y v_j + x w_j \qquad F\langle w_j, v_j\rangle \subset \langle v_{j+1}, v_j, w_{j+1}, w_j\rangle$$

$$\Rightarrow F\langle v_1, \dots, v_k, w_1 \dots w_k\rangle \subset \langle v_1, \dots v_k, w_1, \dots, w_k\rangle \subset W(\lambda, \bar{\lambda})$$

WIELOMIAN MINIMALNY

Przy wyznaczaniu funkcji od operatora metodą dzielenia przez wielomian potrzebujemy wielomianu znikającego na operatorze

$$f(\lambda) = r(\lambda)\,w(\lambda) + r(\lambda) \qquad f(F) = r(F)$$
$$w(F) = 0$$

Wiadomo, że $\deg r < \deg w$, więc dobrze by było, żeby w było możliwie niskiego stopnia. Można zawsze użyć wielomianu charakterystycznego, który jest stopnia równego wymiarowi przestrzeni. Czy istnieje wielomian niższego stopnia znikający na F? Odpowiedź jest: to zależy...

Zależy mianowicie od postaci podprzestrzeni pierwiastkowych. Weźmy jak zwykle V nad $\mathbb{C}$, $F \in \mathrm{End}(V)$ $\mathrm{Sp}\,F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$

$$V(\lambda_i) = \ker(F - \lambda_i\, id_V)^{k_i}$$

Może się zdarzyć, że k_i jest większe niż stopień nilpotentności $(F-\lambda_i\, id_V)|_{V(\lambda_i)}$
Oznaczamy l_i = stopień nilpotentności $(F-\lambda_i\, id_V)|_{V(\lambda_i)}$

wtedy $V(\lambda_i) = \ker(F-\lambda_i\, id_V)^{l_i}$ i wielomian

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1} \dots (\lambda-\lambda_r)^{l_r} \text{ ma własność } \varphi(F) = 0$$

Wielomian ten nazywamy wielomianem minimalnym a stwierdzenie mówiące iż $\varphi(F)=0$ zostawiamy bez dowodu. Zainteresowani mogą samodzielnie spróbować sformułować ten dowód.

PRZYKŁAD (dotyczący kompleksyfikacji)

Zanalizować $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ i obliczyć $\exp(tA)$

$$w_A = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 4 - 4 - \lambda - 4\lambda - 4\lambda = -\lambda^3 - 9\lambda = -\lambda(\lambda^2+9) =$$
$$= -\lambda(\lambda-3i)(\lambda+3i)$$

$\mathrm{Sp}\,A = \{0, 3i, -3i\}$

$$V(0) = \ker A = \ker\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \overset{e}{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}} \right\rangle$$

$x = -z$
$2y = -z$

$$V(3i) = \ker \begin{bmatrix} -3i & 2 & 1 \\ -2 & -3i & -2 \\ -1 & 2 & -3i \end{bmatrix} = \dots = \left\langle \begin{bmatrix} 4-3i \\ 2+6i \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V(-3i) = \left\langle \begin{bmatrix} 4+3i \\ 2-6i \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \qquad u = v + iw \quad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W = W(3i, -3i) = \langle v, w \rangle$$

$$A(v+iw) = 3i(v+iw) = 3iv - 3w = -3w + 3iv$$

$$[A_{|W}]^{(v,w)}_{(v,w)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

baza $E = (e, v, w)$ $\qquad [A]^E_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$\exp(tA) = ?$ $\qquad \exp(\lambda t) = \sigma(\lambda)\lambda(\lambda-3i)(\lambda+3i) + a\lambda^2 + b\lambda + c$

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\quad 1 = c \\ \lambda = 3i &\quad e^{3it} = -9a + 3ib + 1 \\ \lambda = -3i &\quad e^{-3it} = -9a - 3ib + 1 \end{aligned}$$

$$+ \quad 2\cos(3t) = 18a + 2 \qquad \cos 3t = 9a + 1$$

$$2\cancel{i} \sin 3t = 6\cancel{i} b \qquad \sin 3t = 3b \qquad b = \frac{1}{3}\sin 3t$$

$$a = \frac{1}{9}\cos 3t - \frac{1}{9}$$

$\exp(At) = \left(\frac{1}{9}\cos 3t - \frac{1}{9}\right)A^2 + \frac{1}{3}\sin(3t) A + \mathbb{1}$ = dalsze rachunki wymagają cierpliwości...