ALGEBRA R23

Iloczyn skalarny – przestrzenie euklidesowe i unitarne, Nierówności Schwarza i Minkowskiego

PRZESTRZENIE Z ILOCZYNEM SKALARNYM

W dalszym ciągu wykładu zajmować się będziemy przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ z dodatkową strukturą – iloczynem skalarnym. Obie te sytuacje opisywać będziemy łącznie, zwracając uwagę na różnice między $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ wtedy gdy jest to konieczne.

DEFINICJA Iloczynem skalarnym na przestrzeni V nad $\mathbb{K}$ nazywamy odwzorowanie

$$V \times V \ni (v, w) \longmapsto \langle v | w \rangle \in \mathbb{K}$$

mające następujące własności

i $\overline{\langle v | w \rangle} = \langle w | v \rangle \to$ dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ symetryczne

ii $\langle v | w + w' \rangle = \langle v | w \rangle + \langle v | w' \rangle$

iii $\langle v | \lambda w \rangle = \lambda \langle v | w \rangle$

} liniowe ze względu na drugi

iv $\langle v | v \rangle > 0$ dla $v \neq 0$ rzeczywiste i dodatnie

W przypadku rzeczywistym odwzorowanie to jest dwuliniową symetryczną niezdegenerowaną formą dodatnio określoną.

W przypadku zespolonym warunki ii oraz iii oznaczają, że odwzorowanie jest liniowe ze względu na drugi argument. W połączeniu z i otrzymujemy, że jest antyliniowe ze względu na pierwszy, tzn

$$\langle v + v' | w \rangle = \langle v | w \rangle + \langle v' | w \rangle, \quad \langle \lambda v | w \rangle = \bar{\lambda} \langle v | w \rangle$$

odwzorowanie liniowe ze względu na drugi i antyliniowe ze względu na pierwszy nazywa się $3/2$-liniowe

PRZYKŁADY:

$V = \mathbb{R}^n \quad \langle x | y \rangle = \sum x^i y^i, \quad V = \mathbb{C}^n \quad \langle x | y \rangle = \sum \overline{x^i} y^i,$

$V = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \{(x_i) : \sum |x_i|^2 < \infty\} \quad \langle x | y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}^i y^i$

$V = C([0,1], \mathbb{R}) \quad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$

$V = C([0,1], \mathbb{C}) \quad \langle f | g \rangle = \int_0^1 \bar{f}(t) g(t) dt$

Rzeczywista przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym nazywa się euklidesowa, zespolona przestrzeń z iloczynem skalarnym nazywa się unitarna.

Dzięki warunkowi iv z definicji iloczynu skalarnego w przestrzeni unitarnej i euklidesowej można zdefiniować długość wektora nazywaną też normą.

DEFINICJA Normę w przestrzeni z iloczynem skalarnym nazywamy odwzorowanie

$$V \ni v \longmapsto \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle} \in \mathbb{R}$$

STWIERDZENIE

Nierówność Schwarza $\quad |\langle v|w\rangle| \leqslant \|v\|\,\|w\|$

Nierówność Minkowskiego $\quad \|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$

$$\big|\, \|v\| - \|w\| \,\big| \leqslant \|v-w\|$$

DOWÓD: (trochę nudne)

Gdy $\langle v|w\rangle = 0$ nierówność Schwarza jest oczywista. Gdy $\langle v|w\rangle \neq 0$ mamy

$$0 \leqslant \left\| v - \frac{\|v\|^2}{\langle v|w\rangle} w \right\| = \left\langle v - \frac{\|v\|^2}{\langle v|w\rangle} w \,\middle|\, v - \frac{\|v\|^2}{\langle v|w\rangle} w \right\rangle =$$

$$\|v\|^2 + \frac{\|v\|^4\|w\|^2}{|\langle v|w\rangle|^2} - \frac{\|v\|^2}{\cancel{\langle v|w\rangle}}\cancel{\langle v|w\rangle} - \frac{\|v\|^2}{\langle v|w\rangle}\langle w|v\rangle =$$

$$\frac{\|v\|^2}{|\langle v|w\rangle|^2}\left(\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v|w\rangle\langle w|v\rangle\right)$$

dodatnie

$$0 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v|w\rangle|^2$$

$$\Downarrow$$

$$|\langle v|w\rangle| \leqslant \|v\|\,\|w\|$$

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w | v+w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle =$$

$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v|w\rangle + \overline{\langle v|w\rangle} = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle v|w\rangle \leqslant$$ (Re mniejsze od modułu)

$$\leqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,|\langle v|w\rangle| \leqslant$$ (nierówność Schwarza)

$$\leqslant \|v\| + \|w\| + 2\|v\|\,\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$$

$\Rightarrow$ Minkowski

$$\|v-w\|^2 = \langle v-w | v-w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \langle v|w\rangle - \langle w|v\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle v|w\rangle$$

$$\geqslant \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\,\|w\| = (\|v\| - \|w\|)^2$$

$$\Rightarrow \|v-w\|^2 \geqslant (\|v\| - \|w\|)^2 \Rightarrow \|v-w\| \geqslant \big|\,\|v\| - \|w\|\,\big|$$

WNIOSEK Przestrzenie unitarne i euklidesowe są przestrzeniami metrycznymi w szczególności mają naturalną topologię. Dotyczy to także wymiaru nieskończonego. Przestrzenie unitarne i euklidesowe wymiaru nieskończonego są domeną analizy funkcjonalnej. Nasze rozważania będą prostsze, zazwyczaj skończenie wymiarowe, chociaż będziemy robić wycieczki w stronę wymiaru nieskończonego.

UKŁADY ORTONORMALNE i ORTOGONALNE

O układach ortogonalnych i ortonormalnych opowiemy w taki sposób, żeby terminologia pasowała także do wymiaru nieskończonego. Przez to w wymiarze skończonym może się to wydawać „rozdzielaniem włosa na czworo" i niepotrzebnym mnożeniem nazw.

Będziemy mówili, że wektory v i w są ortogonalne lub prostopadłe jeśli $\langle v|w\rangle = 0$. Jeśli S jest pewnym podzbiorem w V to symbolem $S^\perp$ oznaczać będziemy zbiór wektorów prostopadłych do wszystkich wektorów z S:

$$S^\perp = \{ v \in V : \forall w \in S \quad \langle w|v\rangle = 0 \}$$

Łatwo zauważyć że $S^\perp$ jest podprzestrzenią wektorową (nawet jeśli S nią nie jest)

Układem ortogonalnym nazywać będziemy zbiór wektorów z których każdy jest prostopadły do pozostałych: $\forall v, w \in S \quad \langle v|w\rangle = 0$. Układ S nazwiemy ortonormalnym jeśli dodatkowo wszystkie elementy S mają normę 1. Układ ortonormalny S nazwiemy zupełnym jeśli nie jest on zawarty w innym układzie ortonormalnym jako podzbiór właściwy.

STWIERDZENIE Układ ortonormalny jest liniowo niezależny

DOWÓD

Weźmy $\{v_1, \dots, v_n\} \subset S$ $\quad \lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n = 0$, wtedy

$$0 = \langle \lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n | v_i \rangle = \overline{\lambda^1}\langle v_1|v_i\rangle + \dots + \overline{\lambda^n}\langle v_n|v_i\rangle = \overline{\lambda^i} \Rightarrow \lambda^i = 0$$ ■

TWIERDZENIE (Nierówność Bessela) Niech $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie skończonym układem ortonormalnym. Niech także

$\alpha^i(v) = \langle v_i | v\rangle$ Dla dowolnego v zachodzi $\sum_{i=1}^{n} |\alpha^i(v)|^2 \leqslant \|v\|^2$

Ponadto $v - \sum_i \alpha^i(v) v_i$ jest prostopadły do $\langle v_1, \dots, v_n\rangle$.

DOWÓD

$$\| v - \sum \alpha^i(v) v_i \|^2 = \langle v - \sum \alpha^i(v) v_i \,|\, v - \sum \alpha^i(v) v_i \rangle =$$