# ALGEBRA R 24

Przestrzenie
z iloczynem
skalarnym

- układy ortonormalne
- Lemat Riesza
- Ortonormalizacja

nieskończonego. Przestrzenie unitarne i euklidesowe wymiaru nieskończonego są domeną analizy funkcjonalnej. Nasze rozważania będą prostsze, zazwyczaj skończenie wymiarowe, chociaż będziemy robić wycieczki w stronę wymiaru nieskończonego.

## UKŁADY ORTONORMALNE i ORTOGONALNE

O układach ortogonalnych i ortonormalnych opowiemy w taki sposób, żeby terminologia pasowała także do wymiaru nieskończonego. Przez to w wymiarze skończonym może się to wydawać „rozdzielaniem włosa na czworo" i niepotrzebnym mnożeniem nazw.

Będziemy mówili, że wektory $v$ i $w$ są ortogonalne lub prostopadłe jeśli $\langle v|w\rangle = 0$. Jeśli $S$ jest pewnym podzbiorem w $V$ to symbolem $S^\perp$ oznaczać będziemy zbiór wektorów prostopadłych do wszystkich wektorów z $S$:

$$S^\perp = \{ v \in V : \forall w \in S \quad \langle w|v\rangle = 0 \}$$

Łatwo zauważyć że $S^\perp$ jest podprzestrzenią wektorową (nawet jeśli $S$ nią nie jest)

Układem ortogonalnym nazywać będziemy zbiór wektorów z których każdy jest prostopadły do pozostałych: $\forall v, w \in S \quad \langle v|w\rangle = 0$. Układ $S$ nazwiemy ortonormalnym jeśli dodatkowo wszystkie elementy $S$ mają normę 1. Układ ortonormalny $S$ nazwiemy zupełnym jeśli nie jest on zawarty w innym układzie ortonormalnym jako podzbiór właściwy.

**STWIERDZENIE** Układ ortonormalny jest liniowo niezależny

**DOWÓD**

Weźmy $\{v_1, \dots, v_n\} \subset S$ $\lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n = 0$, wtedy

$$0 = \langle \lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n | v_i \rangle = \overline{\lambda^1}\langle v_1 | v_i\rangle + \dots + \overline{\lambda^n}\langle v_n|v_i\rangle = \overline{\lambda^i} \Rightarrow \lambda^i = 0$$

■

**TWIERDZENIE** (Nierówność Bessela) Niech $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie skończonym układem ortonormalnym. Niech także

$\alpha^i(v) = \langle v_i | v\rangle$ Dla dowolnego $v$ zachodzi $\sum_{i=1}^{n} |\alpha^i(v)|^2 \leq \|v\|^2$

Ponadto $v - \sum_i \alpha^i(v) v_i$ jest prostopadły do $\langle v_1, \dots, v_n\rangle$.

**DOWÓD**

$$\| v - \sum \alpha^i(v) v_i \|^2 = \langle v - \sum \alpha^i(v) v_i \,|\, v - \sum \alpha^i(v) v_i \rangle =$$

$$\|v - \sum \alpha^i(v) v_i\|^2 = \langle v - \sum \alpha^i(v) v_i \mid v - \sum \alpha^i(v) v_i \rangle = \|v\|^2 - \sum_i \overline{\alpha^i(v)} \underbrace{\langle v_i | v\rangle}_{\alpha^i(v)} +$$

$$- \sum_i \alpha^i(v) \langle v | v_i \rangle + \sum_i \sum_j \overline{\alpha^i(v)} \alpha^j(v) \overbrace{\langle v_i | v_j \rangle}^{\delta_{ij}} =$$

$$= \|v\|^2 - \sum_i |\alpha^i(v)|^2 - \cancel{\sum_i |\alpha^i(v)|^2} + \cancel{\sum_i |\alpha^i(v)|} = \|v\|^2 - \sum_i |\alpha^i(v)|^2$$

Wiadomo, że $\|v - \sum_i \alpha^i(v) v_i\|^2 \geq 0$ zatem

$$\|v\|^2 - \sum_i |\alpha^i(v)|^2 \geq 0 \quad \text{tzn} \quad \|v\|^2 \geq \sum_i |\alpha^i(v)|^2 \quad \blacksquare$$

## PRZYKŁADY UKŁADÓW ORTONORMALNYCH

(1) Oczywisty: $(e_1, \dots, e_n)$ baza kanoniczna w $\mathbb{K}^n$ z kanonicznym iloczynem skalarnym jest zupełnym układem ortonormalnym

(2) $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$ $\quad e_n(t) = e^{int}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$ jest zupełnym układem ortogonalnym $\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{int}} e^{imt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt =$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t + i \sin(m-n)t) dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ 2\pi & \text{dla } m = n \end{cases} \quad \text{tzn} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \quad n \in \mathbb{Z}$$

jest układem ortonormalnym. Zupełności nie dowodzimy $\longrightarrow$ analiza funkcjonalna I.

**TWIERDZENIE** $\dim V < \infty$, $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ jest układem ortonormalnym. Wówczas równoważne są warunki

(1) $S$ jest zupełny $\quad$ (2) $\forall i \ \langle v_i | v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

(3) $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ $\quad$ (4) $\forall v \ \ v = \sum_i \langle v_i | v \rangle v_i$

(5) $\forall v, w \in V \ \ \langle v | w \rangle = \sum_i \langle v | v_i \rangle \langle v_i | w \rangle$ $\quad$ (6) $\forall v \ \ \|v\|^2 = \sum |\langle v_i | v \rangle|^2$

**DOWÓD:** (1) $\Rightarrow$ (2) a.a. załóżmy że istnieje $v \neq 0$ taki, że $\langle v_i | v \rangle = 0$. Wtedy $S \cup \{ v/\|v\| \}$ jest układem ortonormalnym zawierającym $S$, co jest sprzeczne z zupełnością $S$. (2) $\Rightarrow$ (3) a.a. załóżmy, że $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subsetneq V$. Wtedy istnieje $v \in V$ taki że $(v_1, \dots, v_n, v)$ jest liniowo niezależny. Oznaczmy $\alpha_i(v) = \langle v_i | v \rangle$. Wektor

$w = v - \sum_i \alpha_i(v) v_i$ jest niezerowy i ma własność

$$\langle v_i | w \rangle = \langle v_i | v - \sum_j \alpha_j(v) v_j \rangle = \alpha_i(v) - \sum_j \alpha_j(v) \underbrace{\langle v_i | v_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \alpha_i(v) - \alpha_i(v) = 0$$

zatem $w = 0$, ale wtedy $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ (3) $\Rightarrow$ (4) Skoro $(v_1, \dots, v_n)$ rozpina $V$ i jest liniowo niezależny to jest bazą $V$. Wtedy każdy wektor $v$

zapisać można jednoznacznie w postaci $v = \sum_i \lambda^i v_i$. Wtedy $\langle v_i | v \rangle =$

$$\langle v_i | \sum_j \lambda^j v_j \rangle = \sum_j \lambda^j \underbrace{\langle v_i | v_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \lambda^i \quad \text{, tzn} \quad v = \sum_i \langle v_i | v \rangle v_i$$

(4)=>(5) Bierzemy $v, w \in V$ i zapisujemy $w = \sum_i \langle v_i | w \rangle v_i$. Tę postać wstawiamy do iloczynu skalarnego

$$\langle v | w \rangle = \langle v | \sum_i \langle v_i | w \rangle v_i \rangle = \sum_i \langle v | v_i \rangle \langle v_i | w \rangle$$

(5)=>(6) Biorąc $w = v$ otrzymujemy $\|v\|^2 = \sum_i \langle v | v_i \rangle \langle v_i | v \rangle = \sum_i |\langle v_i | v \rangle|^2$

(6)=>(1) Załóżmy, że istnieje układ ortonormalny $T$ zawierający $S$ jako podzbiór właściwy. Weźmy $x \in T \setminus S$. Zgodnie z 6 $\|x\|^2 = \sum_i |\langle v_i | x \rangle|^2$ ale $\{x, v_1, \dots, v_n\}$ jest ortonormalny więc

$$1 = \|x\|^2 = \sum_i |\underbrace{\langle v_i | x \rangle}_{=0}| = 0 \quad \text{sprzeczność} \quad \blacksquare$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że zupełny układ ortonormalny jest bazą skończenie wymiarowej przestrzeni z iloczynem skalarnym. Współczynniki rozkładu wektora w bazie można znajdować licząc iloczyny skalarne z wektorami bazowymi (4) a sam iloczyn skalarny w bazie ortonormalnej ma postać kanoniczną (5)

W przestrzeni nieskończenie wymiarowej tak nie jest. Bazę definiowaliśmy jako układ liniowo niezależny taki, że każdy wektor jest kombinacją liniową skończonej liczby wektorów bazowych. W przestrzeniach z iloczynem skalarnym mamy metrykę, zatem można rozważać sumy nieskończone. Można zatem próbować zmienić pojęcie bazy dopuszczając szeregi. Tu pojawiają się oczywiście komplikacje topologiczne – zupełność przestrzeni, kolejność sumowania i.t.d.

TWIERDZENIE Niech $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ będzie co najwyżej przeliczalnym układem liniowo niezależnym. Wówczas istnieje układ $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ o mocy równej wyjściowemu układowi i taki, że $\forall k \ \langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$

DOWÓD: Kładziemy $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, następnie definiujemy $y_2 = x_2 - \langle e_1 | x_2 \rangle e_1$

Sprawdzamy $\langle e_1 | y_2 \rangle = \langle e_1 | x_2 - \langle e_1 | x_2 \rangle e_1 \rangle = \langle e_1 | x_2 \rangle - \langle e_1 | x_2 \rangle \langle e_1 | e_1 \rangle = 0$

Kładziemy $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$. Mamy wtedy $\langle x_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ oraz $\{e_1, e_2\}$ jest ortonormalny.

Następny krok konstruujemy z poprzedniego biorąc

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i | x_{k+1} \rangle e_i$$

Oraz $e_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$. Mamy znowu $\langle x_1, \dots, x_{k+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{k+1} \rangle$. Tę procedurę kontynuujemy aż do wyczerpanie wektorów w układzie $\{x_1, \dots, \}$ lub do nieskończoności jeśli w wyjściowym układzie jest nieskończenie wiele elementów

Powyższe twierdzenie prowadzi do następującego wniosku:

**WNIOSEK** Każda skończenie wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym ma bazę ortonormalną.
Istotnie – wystarczy wziąć dowolną bazę i przeprowadzić powyższą procedurę. Procedura ta nazywa się ORTONORMALIZACJA GRAMMA-SCHMIDTA

Kolejnym wnioskiem jest następujące twierdzenie:

**TWIERDZENIE** Niech $V$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią z iloczynem skalarnym. Niech także $W$ będzie podprzestrzenią wektorową. Wówczas

$$V = W \oplus W^{\perp} \quad i \quad (W^{\perp})^{\perp} = W$$

**DOWÓD**: Z definicji mamy $W^{\perp} = \{ v \in V : \forall w \in W \ \langle v | w \rangle = 0 \}$ Wybierzmy bazę ortonormalną $W$: $(x_1, \dots, x_k)$ zawsze można to zrobić – wystarczy wziąć dowolną bazę i przeprowadzić ortonormalizację Grama Schmidta.

Dla $v \in V$ definiujemy $P(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle x_i | v \rangle x_i$ $P$ jest endomorfizmem liniowym. Łatwo też zauważyć, że $\operatorname{im} P = W$.

Sprawdzamy także, że $P^2(v) = P(v)$: $P(P(v)) = P\left( \sum_{i=1}^{k} \langle x_i | v \rangle x_i \right) =$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left( x_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} \langle x_i | v \rangle x_i \right) x_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\langle x_j | x_i \rangle}_{=\delta_{ij}} \langle x_i | v \rangle x_j = \sum_{j=1}^{k} \langle x_j | v \rangle x_j = P(v)$$

Z dowolności $v$ wnioskujemy $P^2 = P$, zatem $P$ jest rzutem na $W = \operatorname{im} P$ wzdłuż $\ker P$. Wykażemy że $\ker P = W^{\perp}$

$$u \in \ker P \iff P(u) = 0 \iff \sum_{j=1}^{k} \langle x_j | u \rangle x_j = 0 \iff \forall_{j \in \{1 \dots k\}} \ \langle x_j | u \rangle = 0.$$

liniowo niezależne

Weźmy teraz $w \in W$ – wtedy $w = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ i mamy

$\langle w | u \rangle = \langle \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k | u \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle x_1 | u \rangle + \dots + \bar{\alpha}_k \langle x_k | u \rangle = 0$ zatem $u \in W^{\perp}$, tzn $\ker P \subset W^{\perp}$. Odwrotnie, jeśli $u \in W^{\perp}$ to w szczególności $\langle x_i | u \rangle = 0$ dla $i \in \{1 \dots k\}$, więc $P(u) = 0$, tzn $W^{\perp} \subset \ker P$

Ostatecznie $P$ jest rzutem na $W$ wzdłuż $W^{\perp}$ co gwarantuje $W \oplus W^{\perp} = V$.

Pokażemy że $(W^\perp)^\perp = W$. Z definicji $W^\perp = \{v \in V : \forall w \in W \ \langle v|w\rangle = 0\}$, zatem jest oczywiste, że $W \subset (W^\perp)^\perp$. Równość wynika z rachunku wymiarów (tego argumentu nie możemy stosować gdy $\dim V = \infty$, i istotnie w ogólności twierdzenie $(W^\perp)^\perp = W$ nie zachodzi. Potrzebne są założenia natury topologicznej. $\blacksquare$

**LEMAT RIESZA** Niech $V$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią z iloczynem skalarnym. Wówczas dla każdego $\varphi \in V^*$ istnieje $w \in V$ takie, że $\varphi(v) = \langle w|v\rangle$ dla dowolnego $v$.

DOWÓD: Weźmy ortonormalną bazę $(e_1, \dots, e_n)$ w $V$ i ustalmy $\varphi \in V^*$. $\varphi$ jest w pełni scharakteryzowane przez wartości $\varphi_i = \varphi(e_i)$. Weźmy teraz wektor

$$w = \bar{\varphi}_1 e_1 + \bar{\varphi}_2 e_2 + \dots + \bar{\varphi}_n e_n$$

Obliczmy $\varphi(v)$ dla $v \in V$. W bazie $e$ mamy $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$ zatem

$$\varphi(v) = \varphi(v^1 e_1 + \dots + v^n e_n) = v^1 \varphi(e_1) + \dots + v^n \varphi(e_n) = v^1 \varphi_1 + \dots + v^n \varphi_n$$

Obliczmy teraz $\langle w|v\rangle$:

$$\langle w|v\rangle = \langle \bar{\varphi}_1 e_1 + \dots \bar{\varphi}_n e_n | v^1 e_1 + \dots + v^n e_n\rangle = \sum_{ij} \varphi_i v^j \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \varphi_1 v^1 + \dots + \varphi_n v^n$$

Istotnie mnożenie skalarne przez $w$ daje taki sam wynik jak obliczenie $\varphi$. Przyporządkowanie

$$\varphi \longmapsto w \quad \text{jest antyliniowe tzn} \quad \lambda\varphi \longmapsto \bar{\lambda} w$$

Jądro tego odwzorowania jednak jest trywialne, tzn jest ono wzajemnie jednoznaczne. $\blacksquare$

Lemat Riesza można uogólnić na przestrzenie nieskończonego wymiaru dodając pewne założenia: $V$ musi być zupełna w topologii pochodzącej od metryki związanej z $\langle\,|\,\rangle$ oraz $\varphi$ musi być funkcjonałem ciągłym.

Zespolona zupełna przestrzeń liniowa z $3/2$ liniowym iloczynem skalarnym nazywa się przestrzenią Hilberta. Lemat Riesza obowiązuje więc dla funkcjonałów ciągłych na przestrzeni Hilberta.