ALGEBRA R 25

PRZESTRZEŃ Z IL. SKALARNYM

Sprzężenie hermitowskie

Operatory unitarne, hermitowskie,
dodatnie, normalne

Pokażemy że $(W^\perp)^\perp = W$. Z definicji $W^\perp = \{v \in V : \forall w \in W \ \langle v|w\rangle = 0\}$, zatem jest oczywiste, że $W \subset (W^\perp)^\perp$. Równość wynika z rachunku wymiarów (tego argumentu nie możemy stosować gdy $\dim V = \infty$, i istotnie w ogólności twierdzenie $(W^\perp)^\perp = W$ nie zachodzi. Potrzebne są założenia natury topologicznej. ■

LEMAT RIESZA Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią z iloczynem skalarnym. Wówczas dla każdego $\varphi \in V^*$ istnieje $w \in V$ takie, że $\varphi(v) = \langle w|v\rangle$ dla dowolnego v.

DOWÓD: Weźmy ortonormalną bazę $(e_1, \dots, e_n)$ w V i ustalmy $\varphi \in V^*$. φ jest w pełni scharakteryzowane przez wartości $\varphi_i = \varphi(e_i)$. Weźmy teraz wektor

$$w = \bar{\varphi}_1 e_1 + \bar{\varphi}_2 e_2 + \dots + \bar{\varphi}_n e_n$$

Obliczmy $\varphi(v)$ dla $v \in V$. W bazie e mamy $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$ zatem

$$\varphi(v) = \varphi(v^1 e_1 + \dots + v^n e_n) = v^1 \varphi(e_1) + \dots + v^n \varphi(e_n) = v^1 \varphi_1 + \dots + v^n \varphi_n$$

$=$

Obliczmy teraz $\langle w|v\rangle$:

$$\langle w|v\rangle = \langle \bar{\varphi}_1 e_1 + \dots \bar{\varphi}_n e_n | v^1 e_1 + \dots + v^n e_n\rangle = \sum_{ij} \varphi_i v^j \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \varphi_1 v^1 + \dots + \varphi_n v^n$$

Istotnie mnożenie skalarne przez w daje taki sam wynik jak obliczenie φ. Przyporządkowanie

$$\varphi \longmapsto w \text{ jest antyliniowe tzn } \lambda\varphi \longmapsto \bar{\lambda} w$$

Jądro tego odwzorowania jednak jest trywialne, tzn jest ono wzajemnie jednoznaczne. ■

Lemat Riesza można uogólnić na przestrzenie nieskończonego wymiaru dodając pewne założenia: V musi być zupełna w topologii pochodzącej od metryki związanej z $\langle \cdot | \cdot \rangle$ oraz φ musi być funkcjonałem ciągłym.

Zespolona zupełna przestrzeń liniowa z 3/2 liniowym iloczynem skalarnym nazywa się przestrzenią Hilberta. Lemat Riesza obowiązuje więc dla funkcjonałów ciągłych na przestrzeni Hilberta.

DAVID HILBERT

1862 – 1943
(Królewiec) (Getynga)

About a year later, Hilbert attended a banquet and was seated next to the new Minister of Education, Bernhard Rust. Rust asked whether "the *Mathematical Institute* really suffered so much because of the departure of the Jews". Hilbert replied, "Suffered? It doesn't exist any longer, does it!"[17][18]

1929

Lemat Riesza jest podstawą notacji używanej w Mechanice kwantowej, gdzie wektory oznacza się $|v\rangle$ a funkcjonały liniowe (ciągłe) $\langle w|$

bra ket

Mając bazę $(e_1, \dots, e_k)$ podprzestrzeni $W \subset V$ można łatwo zapisać rzut ortogonalny na W wzdłuż $W^\perp$:

$$P = \sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i| \qquad P(v) = \sum_{i=1}^{k} |e_i\rangle\langle e_i|v\rangle$$

TWIERDZENIE Niech $P \in \mathrm{End}(V)$ będzie rzutem. Równoważne są warunki

(1) $\ker P = (\mathrm{im}\,P)^\perp$ (2) $\forall\, w, v \in V \quad \langle v | Pw\rangle = \langle Pv | w\rangle$

DOWÓD

(1) $\Rightarrow$ (2) Warunek (1) oznacza, że P jest rzutem ortogonalnym, zatem $V = \ker P \oplus \mathrm{im}\,P$. Weźmy dowolne wektory v, w i rozłóżmy na składowe w przestrzeniach $\ker P$ i $\mathrm{im}P$

$$v = \underbrace{Pv}_{\mathrm{im}\,P} + \underbrace{(v - Pv)}_{\ker P} \qquad w = Pw + (w - Pw)$$

$$\langle v|Pw\rangle = \langle Pv + (v-Pv)\,|\,Pw\rangle = \langle Pv|Pw\rangle + \underbrace{\langle v-Pv|Pw\rangle}_{=0} =$$

$$= \langle Pv|Pw\rangle + \underbrace{\langle Pv|w-Pw\rangle}_{=0} = \langle Pv|Pw + w - Pw\rangle = \langle Pv|w\rangle$$

(2) ⇒ (1) Skoro P jest rzutem, to $V = \mathrm{im}\,P \oplus \ker P$ i rozkład $v = Pv + (v-Pv)$ jest zgodny z rozkładem na sumę prostą. Mamy pokazać że $(\ker P) = (\mathrm{im}\,P)^{\perp}$

$v \in \mathrm{im}P$ $\quad w \in \ker P \quad \langle v|w\rangle = \langle Pv|w\rangle = \langle v|Pw\rangle = 0$

$\Downarrow$

$v = Pv$ ■

Rzut ortogonalny jest przykładem operatora, który nazywamy samosprzężonym

Z lematu Riesza wynika, że dla dowolnego operatora $F \in \mathrm{End}(V)$ istnieje operator $T^+ \in \mathrm{End}(V)$ spełniający

$$\forall_{v,w} \quad \langle v|Tw\rangle = \langle T^+v|w\rangle$$

Istotnie, jeśli $g: V \to V^+$ jest odwzorowaniem $v \mapsto \langle v|$ (antyliniowym) a F^* oznacza sprzężenie (w sensie przestrzeni dualnych) operatora F to

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[rrr, bend right, "F^+"'] & V^* \arrow[r, "F^*"] & V^* \arrow[r, "g^{-1}"] & V \end{tikzcd}$$

$$F^+ = g^{-1} \circ F^* \circ g$$

WŁASNOŚCI OPERACJI SPRZĘŻENIA

STWIERDZENIE: Dla $F \in \mathrm{End}(V)$ gdzie V jest skończenie wymiarową przestrzenią z iloczynem skalarnym zachodzą równości

(1) $(F^+)^+ = F$ (2) $(\lambda F)^+ = \bar{\lambda} F^+$ (3) $(F+G)^+ = F^+$ (4) $(FG)^+ = G^+F^+$

DOWÓD

(1) $\forall_{v,w} \quad \langle v|Fw\rangle = \langle F^+v|w\rangle$

$$\forall_{v,w} \quad \langle (F^+)^+ v|w\rangle = \langle v|F^+w\rangle = \overline{\langle F^+w|v\rangle} = \overline{\langle w|Fv\rangle} = \langle Fv|w\rangle$$

(2) $\langle v|\lambda Fw\rangle = \lambda\langle v|Fw\rangle = \lambda\langle F^+v|w\rangle = \langle \bar{\lambda} F^+ v|w\rangle$

(3) ... (4) $\langle v | FGw\rangle = \langle F^+ v | Gw\rangle = \langle G^+F^+ v | w\rangle$ ■

STWIERDZENIE $\ker F^+ = (\operatorname{im} F)^\perp$

DOWÓD:

Niech $v \in \ker F^+$, tzn $F^+ v = 0$. Wówczas $\forall w$ $0 = \langle F^+ v | w\rangle = \langle v | Fw\rangle \Rightarrow$ $v \in (\operatorname{im} F)^\perp$, tzn $\ker F^+ \subset \operatorname{im} F^\perp$

Niech teraz $v \in (\operatorname{im} F)^\perp$ tzn $\forall w \in V$ $\langle v | Fw\rangle = 0 = \langle F^+ v | w\rangle$ tzn $F^+ v = 0$ zatem $v \in \ker F^+$. Wykazaliśmy $(\operatorname{im} F)^\perp \subset \ker F^+$.

$\ker F^+ = (\operatorname{im} F)^\perp$ ■

STWIERDZENIE $F \in \operatorname{End}(V)$, $\dim V < \infty$, V jest p. z iloczynem skalarnym.

$$\overline{Sp(F)} = Sp(F^+)$$

DOWÓD: $\lambda \in Sp(F) \Leftrightarrow \ker(F - \lambda \cdot id_V) \neq \{0\} \Leftrightarrow$

$\operatorname{im}(F - \lambda id_V) \subsetneq V$ z poprzedniego stwierdzenia $(\ker F^+ = (\operatorname{im} F)^\perp)$ wynika także, że $(\ker F^+)^\perp = \operatorname{im}(F)$. Stosując to do $F - \lambda id_V$ otrzymujemy

$$[\ker(F - \lambda id)^+]^\perp \subsetneq V, \text{ więc } \ker(F - \lambda id)^+ \neq \{0\}$$

Biorąc pod uwagę, że $(F - \lambda id_V)^+ = F^+ - \bar{\lambda}\, id_V$ otrzymujemy

$\ker(F^+ - \bar{\lambda}\, id_V) \neq \{0\}$ czyli $\bar{\lambda} \in Sp(F^+)$ ■

Macierz F^+: Niech $e = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą ortonormalną V. Oznaczymy jak zwykle $F^i{}_j$ elementy macierzowe $[F]^e_e$, oznacza to, że $F^i{}_j$ jest współczynnikiem przy e_i w rozkładzie Fe_j w bazie e. Korzystając z ortonormalności e mamy $F^i{}_j = \langle e_i | Fe_j\rangle$

$$F^i{}_j = \langle e_i | Fe_j\rangle = \langle F^+ e_i | e_j\rangle = \overline{\langle e_j | F^+ e_i\rangle} = \overline{(F^+)^i{}_j}$$

$$[F^+]^e_e = \overline{[F]}^T$$

Sprzężenie hermitowskie to transpozycja i sprzężenie zespolone (w bazie ortonormalnej)

W zależności od tego jak operatory zachowują się względem operacji sprzężenia hermitowskiego wyróżniamy pewne klasy operatorów (mających znaczenie np. w mechanice kwantowej: 44

(1) Operator nazywamy normalnym jeśli $F^+F = FF^+$, tzn jeśli komutuje ze swoim hermitowskim sprzężeniem

(2) Operator nazywamy hermitowskim lub samosprzężonym jeśli $F = F^+$

(3) Operator nazywamy antyhermitowskim gdy $F^+ = -F$

(4) Operator nazywamy unitarnym gdy $F^+F = FF^+ = id_V$, tzn $F^+ = F^{-1}$
Operatory unitarne na przestrzeni rzeczywistej są nazywane ortogonalne.
Operatory unitarne (ortogonalne) są izometriami przestrzeni V i każda liniowa izometria jest unitarna/ortogonalna. Istotnie

$$F \in End(V) \quad \forall v \ \|Fv\| = \|v\| \iff \|Fv\|^2 = \|v\|^2 \iff$$

$$\langle Fv | Fv \rangle = \langle v | v \rangle$$ Forma $(v, w) \longmapsto \langle Fv | Fw \rangle$ jest $3/2$ liniowa, jej znajomość na powtarzających się wektorach determinuje znajomość na wszystkich, tzn jeśli $\langle Fv | Fv \rangle = \langle v | v \rangle$ to $\langle Fv | Fw \rangle = \langle v | w \rangle$ i wtedy $\langle v | F^+Fw \rangle = \langle v | w \rangle$ co pociąga $F^+F = id_V$ wobec niezdegenerowania iloczynu skalarnego.

Z drugiej strony, jeśli $F^+F = FF^+ = id_V$ to
$\|v\|^2 = \langle v | v \rangle = \langle F^+Fv | v \rangle = \langle Fv | Fv \rangle = \|Fv\|^2$; F jest izometrią (podobnie jak F^+)

(5) Operator nazywamy dodatnim jeśli dla każdego wektora $v \in V$ zachodzi $\langle v | Fv \rangle \geq 0$ (w szczególności $\langle v | Fv \rangle \in \mathbb{R}$)

Powyższe kategorie nie są oczywiście ze sobą całkowicie niezwiązane.
W szczególności operatory hermitowskie, unitarne, antyhermitowskie są normalne. Łatwo też stwierdzić, że operator dodatni jest operatorem samosprzężonym.

FORMUŁA POLARYZACYJNA DLA 3/2 LINIOWYCH FORM NA ZESPOLONEJ PRZESTRZENI.

Niech $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i $Q: (v,w) \longmapsto Q(v,w) \in \mathbb{C}$ będzie dowolną 3/2 liniową formą. Wówczas

$$Q(v+w, v+w) = Q(v,v) + Q(w,w) + Q(v,w) + Q(w,v)$$
$$-Q(v-w, v-w) = -Q(v,v) - Q(w,w) + Q(v,w) + Q(w,v)$$

$$iQ(v+iw, v+iw) = iQ(v,v) + iQ(w,w) - Q(v,w) + Q(w,v)$$
$$-iQ(v-iw, v-iw) = -iQ(v,v) - iQ(w,w) - Q(v,w) + Q(w,v)$$

$$Q(v+w, v+w) - Q(v-w, v-w) + iQ(v+iw, v+iw) - Q(v-iw, v-iw) =$$
$$= 4Q(w,v)$$

Znajomość formy na powtarzających się wektorach determinuje znajomość formy na dowolnych wektorach!

Omówimy teraz po kolei różne kategorie operatorów na przestrzeni z iloczynem skalarnym biorąc pod uwagę w szczególności spektrum tych operatorów oraz bazy w której operatory te mają szczególnie prostą postać.

OPERATORY UNITARNE

Operator U na skończenie wymiarowej przestrzeni z iloczynem skalarnym jest unitarny jeśli $U^+U = UU^+ = id_V$, tzn $U^+ = U^{-1}$. Wykazaliśmy już wcześniej, że operator unitarny jest izometrią, wobec tego w szczególności jest odwracalny. Rozważymy oddzielnie przypadek zespolony i oddzielnie rzeczywisty: