ALGEBRA R29

Pojęcie iloczynu tensorowego

POJĘCIE ILOCZYNU TENSOROWEGO

Niech V będzie przestrzenią wektorową a $\mathcal{U}$ jej podprzestrzenią. W zbiorze V rozważamy relację równoważności

$$v \sim v' \iff v - v' \in \mathcal{U}$$

Sprawdzamy szybko, że jest to relacja równoważności: zwrotna, bo $v - v = 0 \in \mathcal{U}$, symetryczna, bo jeśli $v - v' \in \mathcal{U}$ to także $v' - v \in \mathcal{U}$ i przechodnia bo jeśli $v - v' \in \mathcal{U}$ i $v' - v'' \in \mathcal{U}$ to $v - v' + v' - v'' = v - v'' \in \mathcal{U}$.

Symbolem $V/\mathcal{U}$ oznaczymy zbiór klas równoważności powyższej relacji. Zauważmy, że $V/\mathcal{U}$ ma naturalną strukturę przestrzeni wektorowej. Na klasach równoważności definiujemy dodawanie i mnożenie przez liczbę wzorami

$$[v] + [w] = [v + w] \qquad \alpha[v] = [\alpha v]$$

definiuje się poprawnie, tzn nie zależą od wyboru reprezentanta:

$[v'] = [v]$ tzn $v' = v + u_1$

$[w'] = [w]$ tzn $w' = w + u_2$

$$v' + w' = v + u_1 + w + u_2 = v + w + \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in \mathcal{U}} \Rightarrow [v' + w'] = [v + w]$$

podobnie

$$v' = v + u \qquad \alpha v' = \alpha v + \underbrace{\alpha u}_{\in \mathcal{U}} \Rightarrow \alpha v \sim \alpha v' \text{ tzn } [\alpha v] = [\alpha v']$$

Zbiór $V/\mathcal{U}$ wraz z działaniami j.w. nazywamy **przestrzenią ilorazową**. Łatwo sprawdzić, że naturalne odwzorowanie $\pi : V \to V/\mathcal{U}$ $\pi(v) = [v]$ jest liniowe. Jego jądrem jest $\mathcal{U}$ $(\ker \pi = \mathcal{U})$, zatem jeśli $\dim V < \infty$ to $\dim(V/\mathcal{U}) = \dim V - \dim \mathcal{U}$.

UWAGA $V/\mathcal{U}$ **nie jest** podprzestrzenią w V. W szczególnych przypadkach można ją utożsamić z podprzestrzenią, np jeśli od samego początku $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}'$, wtedy $V/\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}'$. Tak jest na przykład gdy w V jest iloczyn skalarny i $\dim V < \infty$ wtedy

$V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$ i $V/\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}^{\perp}$. W ogólnym przypadku jednak tak nie jest.

PRZYKŁAD: Przestrzeń ilorazowa pojawia się naturalnie w następującej sytuacji: Niech X będzie p.w. $\dim X < \infty$ i $Y \subset X$ podprzestrzeń. Wtedy istnieje kanoniczny izomorfizm

$$Y^* \simeq X^*/Y^0$$

anihilator Y.

Istotnie, niech $\alpha \in X^*$. Kowektor α można obciąć do podprzestrzeni Y, $\alpha|_Y \in Y^*$. Dwa kowektory α i α' mają jednakowe obcięcia, tzn $\forall y \in Y$ $\alpha(y) = \alpha'(y)$ wtedy i tylko wtedy gdy $0 = \alpha(y) - \alpha'(y) = (\alpha - \alpha')(y)$ i.e. $\alpha - \alpha' \in Y^0$. Odwzorowanie obcięcie do podprzestrzeni jest więc dobrze określone na klasach równoważności. Łatwo sprawdzić że jest to izomorfizm.

STWIERDZENIE: Istnieje kanoniczny izomorfizm między $(V/\mathcal{U})^*$ a $\mathcal{U}^\circ$.

DOWÓD: Obie przestrzenie są tego samego wymiaru. Wskażmy izomorfizm $\phi: \mathcal{U}^\circ \to (V/\mathcal{U})^*$

Niech $\alpha \in \mathcal{U}^\circ$, tzn $\forall u \in \mathcal{U}\ \alpha(u) = 0$.

$\langle \phi(\alpha), [v] \rangle = \alpha(v)$ Wynik nie zależy od wyboru reprezentanta gdyż dla $v' = v + u$ mamy $\alpha(v') = \alpha(v+u) = \alpha(v) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\alpha(u)} = \alpha(v)$

Niech teraz $\phi(\alpha) = 0$, tzn $\forall [v]\ \langle \phi(\alpha), [v] \rangle = 0 = \alpha(v) \Rightarrow \alpha = 0$. ∎

Pojęcie przestrzeni ilorazowej przyda nam się do definicji iloczynu tensorowego. Definicja jest dość abstrakcyjna, jednak dalsze twierdzenie i przykłady być może przybliżą Państwu temat.

Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem. Oznaczmy przez X przestrzeń wektorową skończonych formalnych kombinacji elementów z $V \times W$ tzn obiektów postaci

$$\sum_{v,w} \alpha_{vw} (v, w) \quad \text{takich że prawie wszystkie } \alpha_{vw} = 0$$

Jest to przestrzeń wektorowa. Jak to działa? Niech $v_1, v_2 \in V$ $w_1, w_2, w_3 \in W$

$x_1 = (v_1, w_1) + 3(v_1, w_2) - 2(v_2, w_2) \in X$

$x_2 = (v_1, w_2) + (v_2, w_3) \in X$

$$x_1 + x_2 = (v_1, w_1) + 3(v_1, w_2) - 2(v_2, w_2) + (v_1, w_2) + (v_2, w_3) =$$
$$= (v_1, w_1) + 4(v_1, w_2) - 2(v_2, w_2) + (v_2, w_3)$$

W X wyróżniamy podprzestrzeń Y rozpiętą przez

$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$ $\qquad \alpha(v, w) - (\alpha v, w)$ $\qquad$ dla wszystkich

$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$ $\qquad \alpha(v, w) - (v, \alpha w)$ $\qquad v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

DEFINICJA: Przestrzeń ilorazową X/Y nazywamy *iloczynem tensorowym* $V \otimes W$. Wiemy już z ogólnej teorii, że jest to przestrzeń wektorowa. Nawet jeśli V, W są skończonego wymiaru, to X i Y nie są więc wymiar $V \otimes W$ będziemy musieli policzyć inaczej.

Zauważmy, że w X jest wyróżniony podzbiór $V \times W$ identyfikowany z $\{1 \cdot (v, w) : v \in V, w \in W\}$ podzbiór ten generuje X. Obraz elementu (v, w) względem $\pi: X \to X/Y$ oznaczać będziemy $v \otimes w$ i nazywać *tensorem prostym*. Tensory proste generują $V \otimes W$, tzn każdy tensor jest kombinacją liniową tensorów prostych. Rozpoznanie „na oko", który tensor jest a który nie jest prosty bywa trudne.

Na przykład dla $e_1, e_2 \in V$, $f_1, f_2 \in W$, obie pary liniowo niezależne tensor $e_1\otimes f_1 - e_1\otimes f_2 + 2(e_2\otimes f_1 - e_2\otimes f_2)$ jest prosty a podobnie wyglądający $e_1\otimes f_1 - e_1\otimes f_2 + 2e_2\otimes f_1 - e_2\otimes f_2$ nie jest:

$$e_1\otimes f_1 - e_1\otimes f_2 + 2(e_2\otimes f_1 - e_2\otimes f_2) = e_1\otimes(f_1-f_2) + 2\, e_2\otimes(f_1-f_2) = (e_1+2e_2)\otimes(f_1-f_2)$$

podczas gdy $e_1\otimes f_1 - e_1\otimes f_2 + 2e_2\otimes f_1 - e_2\otimes f_2 = e_1\otimes(f_1-f_2) + e_2\otimes(2f_1-f_2)$ ponieważ f_1-f_2 i $2f_1-f_2$ podobnie jak e_1, e_2 są liniowo niezależne dalej nie da się już tego zwinąć

W powyższych rachunkach wykorzystaliśmy wynikające wprost z definicji równości:

$$(v+v')\otimes w = v\otimes w + v'\otimes w \qquad v\otimes(w+w') = v\otimes w + v\otimes w' \qquad \alpha\, v\otimes w = (\alpha v)\otimes w = v\otimes(\alpha w)$$

Konstrukcja iloczynu tensorowego wydaje się na pierwszy rzut oka (a przynajmniej mi się wydawała) sztuczna. Wartość praktyczna tego konceptu matematycznego jest jednak ogromna! Opiera się ona na następującym twierdzeniu o uniwersalności iloczynu tensorowego:

TWIERDZENIE Dla każdej przestrzeni wektorowej U nad $\mathbb{K}$ oraz dla każdego dwuliniowego odwzorowanie $F: V\times W \to U$ istnieje dokładnie jedno liniowe odwzorowanie $\tilde{F}: V\otimes W \to U$ takie, że przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & & V\otimes W \arrow[dl, "\tilde{F}"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \text{tzn} \qquad \tilde{F}\circ\pi = F$$

DOWÓD: Mając dwuliniowe F definiujemy odwzorowanie $F_X: X \to U$ wzorem

$$F_X\left(\sum \alpha_{vw}(v,w)\right) = \sum \alpha_{vw} F(v,w) \qquad F_X \in L(X,U) \quad \text{dodatkowo}$$

$$F_X\big((v+v',w) - (v,w) - (v',w)\big) = F(v+v',w) - F(v,w) - F(v',w) = 0$$

podobnie dla $(v, w+w')$

$$F_X\big((\alpha v,w) - \alpha(v,w)\big) = F(\alpha v,w) - \alpha F(v,w) = 0 \quad \text{, tzn} \quad \ker F_X \supset Y$$

a to oznacza że warunek $\tilde{F}(v\otimes w) = F_X((v,w))$ zadaje $\tilde{F}$ jednoznacznie (tzn nie zależy od wyboru reprezentanta klasy równoważności $v\otimes w$. Pamiętając, że $F_X((v,w)) = F(v,w)$ dostajemy

$$\tilde{F}(v\otimes w) = F(v,w)$$
$$\parallel$$
$$\tilde{F}(\pi(v,w)) \quad \blacksquare$$

Niech teraz $(e_i)_{i=1}^{n}$ będzie bazą w V zaś $(f_j)_{j=1}^{m}$ bazą w W.

STWIERDZENIE Układ $(e_i \otimes f_j)$ jest bazą $V \otimes W$.

DOWÓD: Musimy pokazać że $(e_i \otimes f_j)$ rozpina $V \otimes W$ oraz że jego elementy są liniowo niezależne. Wiadomo że każdy tensor jest kombinacją liniową tensorów prostych, zaś każdy tensor prosty można zapisać jako

$v \otimes w = (v^i e_i) \otimes (w^j f_j) = v^i w^j e_i \otimes f_j$, zatem nasz układ rozpina $V \otimes W$.

Załóżmy teraz, że $\sum_{i,j} \lambda^{ij} e_i \otimes e_j = 0$ w takim razie dla dowolnego $\alpha \in (V \otimes W)^*$

$\alpha\left(\sum \lambda^{ij} e_i \otimes e_j\right) = 0 = \sum \lambda^{ij} \alpha(e_i \otimes e_j)$. Zauważmy teraz, że dla każdego odwzorowania dwuliniowego $A: V \times W \to \mathbb{K}$, istnieje liniowe $\tilde{A}: V \otimes W \to \mathbb{K}$ jak w twierdzeniu. Weźmy więc $A^{ij}(v,w) = \varepsilon^i(v)\varphi^j(w)$ gdzie (ε^i) jest bazą dualną do (e_i), (φ^j) jest bazą dualną do (f_j).

$$0 = \tilde{A}^{kl}\left(\sum \lambda^{ij} e_i \otimes f_j\right) = \sum \lambda^{ij} \tilde{A}^{kl}(e_i \otimes f_j) = \sum \lambda^{ij} A^{kl}(e_i, f_j) = \sum \lambda^{ij} \delta^k{}_i \delta^l{}_j = \lambda^{kl}$$

Wszystkie współczynniki muszą więc być zerowe. $\blacksquare$

WNIOSEK $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$ dla przestrzeni wymiaru skończonego.

STWIERDZENIE: Przestrzenie $(V \otimes W)^*$ i $V^* \otimes W^*$ są kanonicznie izomorficzne gdy $\dim V < \infty$ i $\dim W < \infty$

DOWÓD: Obie przestrzenie są takiego samego wymiaru

Wiadomo, że każdemu odwzorowaniu dwuliniowemu Φ dokładnie jedno odwzorowanie $\varphi: V \otimes W \to \mathbb{K}$ tzn element $(V \otimes W)^*$. Zważywszy że obie przestrzenie, tzn odwzorowań dwuliniowych na $V \times W$ i $(V \otimes W)^*$ są jednakowego wymiaru, to wynikająca z definicji iloczynu tensorowego odpowiedniość jest izomorfizmem: $(V \otimes W)^* \simeq L(V, W; \mathbb{K})$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & V \otimes W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Z drugiej strony odwzorowanie $V^* \otimes W^* \xrightarrow{\Psi} L(V, W; \mathbb{K})$ dane na tensorach prostych wzorem $\Psi_{\alpha \otimes \beta}(v, w) = \alpha(v)\beta(w)$ jest dobrze określone, gdyż złożenie $\Psi \circ \pi: V^* \times W^* \to L(V, W; \mathbb{K})$ jest dwuliniowe. Łatwo sprawdzić, korzystając np. z bazy że odwzorowanie to jest izomorfizmem. Mamy więc $L(V, W; \mathbb{K}) \simeq V^* \otimes W^*$

Ostatecznie $(V \otimes W)^* \simeq L(V, W; \mathbb{K}) \simeq V^* \otimes W^*$

konstruując oba te izomorfizmy korzystaliśmy jedynie z zastanych struktur oraz z własności iloczynu tensorowego (baza pojawiła się jedynie w dowodzie izomorficzności, nie w definicji)

WNIOSEK: Dyskutowaliśmy już wcześniej formy dwuliniowe na V. Teraz wiemy, że każda forma dwuliniowa jest de facto elementem $V^* \otimes V^*$. W tym sensie w ruchu obrotowym mówi się o tensorze bezwładności a iloczyn skalarny nazywa się tensorem metrycznym.

STWIERDZENIE: Własności iloczynu tensorowego:

(1) $V \otimes W \simeq W \otimes V$

(2) $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$

(3) $\mathbb{K} \otimes V \simeq V$

Wszystkie izomorfizmy są kanoniczne

DOWÓD (1) Istnieje kanoniczny izomorfizm $V \times W \to W \times V : (v, w) \mapsto (w, v)$ który indukuje $v \otimes w \mapsto w \otimes v$

(2) Podobnie, izomorfizm indukowany jest przez odpowiednie izomorfizmy iloczynów kartezjańskich

(3) Pochodzi od $(\mathbb{K}, V) \longrightarrow V : (\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot v$