ALGEBRA R 5

TWIERDZENIE W skończenie wymiarowej przestrzeni wszystkie bazy mają tyle samo elementów.

DOWÓD Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Z definicji oznacza to, że ma bazę mającą skończoną liczbę elementów. Oznaczamy tę bazę $B = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$. Pokażemy najpierw, że dowolny liniowo niezależny układ n wektorów $\{y_1, \dots, y_n\}$ też jest bazą.

Zapiszmy $y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ da się, bo B jest bazą. Ponadto nie wszystkie α_i są zero, bo $y_1 \neq 0$ jako element liniowo niezależnego układu. Załóżmy, że $\alpha_1 \neq 0$ (jeśli nie, przenumerowujemy B)

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n \quad / : \alpha_1 \qquad \frac{y_1}{\alpha_1} = x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_1} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

Układ $\{y_1, x_2, x_3 \dots x_n\}$ rozpina tę samą przestrzeń co $\{x_1, \dots, x_n\}$ czyli całe V, istotnie:

$$v = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} y_1 + \left(\lambda_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) x_2 + \dots + \left(\lambda_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) x_n$$

Krok indukcyjny: Załóżmy, że $\mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathrm{span}\{y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ dla pewnego $m < n$. Wtedy

$$y_{m+1} = a_1 y_1 + \dots + a_m y_m + b_{m+1} x_{m+1} + \dots + b_n x_n$$

nie wszystkie te współczynniki są zero
bo jeśli tak, to $(y_1, \dots, y_m, y_{m+1})$ byłby
liniowo zależny
Załóżmy że $b_{m+1} \neq 0$

$$x_{m+1} = \frac{1}{b_{m+1}} y_{m+1} - \frac{a_1}{b_{m+1}} y_1 - \dots - \frac{a_m}{b_{m+1}} y_m - \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}} x_{m+1} + \dots + \frac{b_n}{b_{m+1}} x_n$$

czyli $\mathrm{span}\{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\} = \mathrm{span}\{y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n\} = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.
Krok indukcyjny skończony. Mamy więc że $\{y_1 \dots y_n\}$ jest bazą.

Załóżmy teraz, że $\{x_1 \dots x_n\}$ jest bazą oraz $\{y_1, \dots, y_m\}$ jest bazą. Jeśli $m > n$ to $\{y_1, \dots, y_n\}$ jest liniowo niezależny a więc na mocy powyższego jest bazą. Wtedy y_{n+1} zapisuje się jako kombinacja liniowa $\{y_1, \dots, y_n\}$ więc $\{y_1, \dots, y_m\}$ jest liniowo zależny $\lightning$. Załóżmy więc, że $m < n$, no ale wtedy $\{x_1, \dots, x_m\}$ jest bazą i $\{x_1 \dots x_n\}$ musi być liniowo zależny $\lightning$. Jedyna możliwość to $m = n$. ■

Powyższe twierdzenie daje możliwość zdefiniowania **wymiaru** przestrzeni wektorowej: Jeśli przestrzeń V jest skończenie wymiarowa to **wymiarem V** nazywamy liczbę elementów bazy V. Wymiar oznaczamy **$\dim V$**. Jeśli V nie jest skończenie wymiarowa to piszemy **$\dim V = \infty$**. Zauważmy, że wśród przestrzeni wymiaru nieskończonego są bardzo różne przestrzenie: np $\mathbb{K}[\,]$ ma bazę przeliczalną, a $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nie. Podobnie przestrzeń ciągów liczbowych nie ma bazy przeliczalnej.

Weźmy teraz V: $\dim V = n$. Zachodzi następujące **STWIERDZENIE** Każdy układ m wektorów dla $m>n$ jest liniowo zależny.

DOWÓD Gdyby $\{y_1, \dots, y_m\}$ był liniowo niezależny to także $\{y_1, \dots, y_n\}$ byłby niezależny. Jednak wtedy $\{y_1 \dots y_n\}$ byłby bazą i y_{n+1} można by wyrazić jako kombinację liniową $y_1 \dots y_n$, co stoi w sprzeczności z liniową niezależnością $y_1 \dots y_m$. ■

Oczywiście każdy nieskończony układ wektorów w przestrzeni skończonego wymiaru też jest liniowo zależny.

W przestrzeni wymiaru skończonego łatwo można udowodnić ogólnie prawdziwe **TWIERDZENIE** **Każdy układ $\{x_1, \dots, x_m\}$ $m < \dim V$ wektorów liniowo niezależnych można uzupełnić do bazy.**

DOWÓD Podobny jak poprzednio. Weźmy $\{x_1, \dots, x_m\}$ i jakąś bazę B. Usuńmy z B wektory $\{x_1, \dots, x_m\}$ jeśli tam są i pozostałe elementy ponumerujmy $\{y_1, \dots, y_k\} = B \setminus \{x_1 \dots, x_m\}$. Rozważmy $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k\}$. Wiadomo, że układ ten rozpina V bo zawiera B. Oznacza to, że albo $\{x_1 \dots y_k\}$ jest liniowo niezależny i wtedy jest szukaną bazą (musi być $\{x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k\} = B$) lub jest liniowo zależny. Jeśli jest zależny to istnieją współczynniki

$\alpha_1 \dots \alpha_m, \beta_1 \dots \beta_k$ nie wszystkie równe zero i takie, że

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_k y_k = 0$$

któryś z tych musi być różny od zera, bo jak nie, to $\{x_1 \dots x_m\}$ liniowo zależny. Załóżmy, że to β_k.

$$y_k = -\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} x_1 + \dots + \frac{\alpha_m}{\beta_1} x_m + \frac{\beta_1}{\beta_k} y_1 + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} y_{k-1}\right)$$

zatem $\{x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_{k-1}\}$ rozpina V. Układ ten może być liniowo niezależny – wtedy jest szukaną bazą, albo zależny, wtedy powtarzamy procedurę i usuwamy kolejny z „igreków". Procedura ta zakończy się najpóźniej na usunięciu y_1, bo założyliśmy $m < \dim V$, więc przynajmniej jeden wektor trzeba dodać. ■

WSPÓŁRZĘDNE

Mając bazę B przestrzeni V możemy jak wiadomo zapisać każdy wektor jednoznacznie jako kombinację liniową wektorów bazy z niezerowymi współczynnikami. Jeśli $\dim V < \infty$ nie upieramy się przy tych niezerowych i zapisujemy w bazie $E = (e_1, \dots, e_n)$ wektor

$$v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$$

współrzędne V w bazie E

Odwzorowanie, które wektorowi przypisuje współrzędne w jakiejś bazie oprócz znaczenia praktycznego ma też głębszy sens

DEFINICJA: *Odwzorowaniem liniowym* nazywamy odwzorowanie $F: V \to W$ między przestrzeniami wektorowymi, które spełnia następujące warunki 22

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad F(v_1+v_2) = F(v_1) + F(v_2)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V \quad F(\lambda v) = \lambda F(v)$$

Czasem, zamiast tych dwóch warunków pisze się jeden: $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)$

PRZYKŁADY: $\mathbb{K}[\,] \ni w \longmapsto w(a) \in \mathbb{K}$ dla ustalonego $a \in \mathbb{K}$,

$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto x+y \in \mathbb{R}$; $\mathbb{C}^2 \ni \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} z_1+z_2 \\ z_1-z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \ldots$

O odwzorowaniach liniowych będziemy jeszcze bardzo dużo mówić. Teraz zajmiemy się przez chwilę szczególną klasą odwzorowań liniowych. Mówimy, że F jest *izomorfizmem liniowym* jeśli F jest liniowe i jest bijekcją. Jeśli dla przestrzeni V i W istnieje izomorfizm liniowy to mówimy, że są one *izomorficzne*. Izomorficzne to znaczy w zasadzie takie same jako przestrzenie wektorowe.

STWIERDZENIE Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech $e = (e_1, \ldots, e_n)$ będzie ustaloną bazą. odwzorowanie

$$\Phi_e : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\Phi_e(x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n) = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

jest izomorfizmem liniowym.

DOWÓD: Sprawdzimy, że Φ_e jest izomorfizmem liniowym: Injektywność wynika z jednoznaczności rozkładu wektora w bazie, surjektywność z faktu że każda kombinacja liniowa $x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$ jest elementem V. Łatwo też sprawdzić, że Φ_e jest liniowe: Weźmy dwa wektory v i w i ich przedstawienia w bazie

$v = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$ $\quad w = y^1 e_1 + \cdots + y^n e_n$. Wówczas z przemienności dodawania

$$v + w = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n + y^1 e_1 + \cdots + y^n e_n = (x^1+y^1) e_1 + \cdots + (x^n+y^n) e_n$$

zatem

$$v + w \longmapsto \begin{bmatrix} x^1+y^1 \\ x^2+y^2 \\ \vdots \\ x^n+y^n \end{bmatrix}$$

Podobnie z mnożeniem przez liczbę

$$\lambda v = \lambda (x^1 e_1 + \cdots + \lambda x^n e_n) = \lambda x^1 e_1 + \cdots + \lambda x^n e_n$$

$$\lambda v \longmapsto \begin{bmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{bmatrix}$$

WNIOSEK: Przestrzeń wektorowa wymiaru n jest izomorficzna z $\mathbb{K}^n$

Jeśli teraz wykażemy, że złożenie izomorfizmów liniowych jest izomorfizmem liniowym oraz że odwrotność izomorfizmu jest izomorfizmem to łatwo wykażemy, że

23

STWIERDZENIE Wszystkie przestrzenie wektorowe wymiaru n są izomorficzne.

izomorfizmy

$$V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} \mathcal{U}$$

złożenie bijekcji jest bijekcją (analiza) trzeba sprawdzić jedynie liniowość

$$G \circ F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = G\big(F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)\big) = G\big(\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)\big) =$$
$$\lambda_1 G(F(v_1)) + \lambda_2 G(F(v_2)) = \lambda_1 G \circ F(v_1) + \lambda_2 G \circ F(v_2)$$

$$V \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} W$$

Odwzorowanie odwrotne do bijekcji jest bijekcją. Sprawdzamy liniowość

$$F^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = v \quad \text{tzn.} \quad F(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

Weźmy $v_1 = F^{-1}(w_1)$ i $v_2 = F^{-1}(w_2)$. Pokażemy, że $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Istotnie

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2. \quad \text{zatem}$$

$$F^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 F^{-1}(w_1) + \lambda_2 F^{-1}(w_2)$$

Ostatecznie jeśli V, W są p.w. nad $\mathbb{K}$ i $\dim V = \dim W = n$ to dla pewnych baz e w V i f w W mamy

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi_e"] \arrow[d, "\Phi_f^{-1} \circ \Phi_e"'] & \mathbb{K}^n \\ W \arrow[ur, "\Phi_f"'] & \end{tikzcd}$$

to jest izomorfizm liniowy

Jako proste ćwiczenie mogą Państwo udowodnić, że izomorfizm liniowy przeprowadza układ liniowo niezależny na układ liniowo niezależny i co za tym idzie bazę na bazę.

WRÓĆMY DO PODPRZESTRZENI WEKTOROWYCH Podprzestrzeń zdefiniowaliśmy jako podzbiór p.w. zamknięty ze względu na działanie dodawania wektorów i mnożenie. Zauważmy że każda p.w. zawiera $\{0\}$ i V jako (trywialne) podprzestrzenie.

Niech teraz $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$ będzie dowolną rodziną podprzestrzeni w V wtedy

STWIERDZENIE

$$\bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha \text{ jest podprzestrzenią wektorową.}$$

DOWÓD:
Należy pokazać że $\bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha =: X$ jest zamknięty ze względu na działanie. Weźmy $v_1, v_2 \in X$. Wiadomo że dla dowolnego $\alpha\in A$ $v_1, v_2 \in W_\alpha$, wtedy oczywiście $v_1+v_2\in W_\alpha$ oraz $\lambda v_1 \in W_\alpha$. Jest tak dla dowolnego α więc $v_1+v_2\in X$ i $\lambda v_1 \in X$ ∎

DEFINICJA Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami V. Zbiór

$$V_1+V_2 = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : v_1\in V_1,\ v_2\in V_2,\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}\}$$ nazywamy

sumą algebraiczną podprzestrzeni V_1 i V_2.

STWIERDZENIE Suma algebraiczna jest podprzestrzenią wektorową
DOWÓD: Rozpaczliwie oczywisty:

Weźmy $w_1, w_2 \in V_1+V_2$. Oznacza to, że $w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ dla $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$ oraz $w_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ dla $u_1\in V_1$, $u_2 \in V_2$

$$w_1+w_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \underbrace{(\lambda_1 v_1 + \beta_1 u_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\lambda_2 v_2 + \beta_2 u_2)}_{\in V_2} \in V_1+V_2$$

podobnie dla mnożenia ... ∎

TWIERDZENIE $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1\cap V_2)$

DOWÓD:

Wybierzmy $v_1 \dots v_k$ - bazę przestrzeni $V_1\cap V_2$. Jest to liniowo niezależny układ w V_1, można go więc uzupełnić do bazy V_1: $(v_1,\dots,v_k, u_1,\dots,u_\ell)$ tzn. m. in. że $\dim V_1 = k+\ell$, $\dim V_1\cap V_2 = k$.
Z drugiej strony $V_1\cap V_2$ jest podprzestrzenią V_2, więc $(v_1,\dots,v_k)$ można uzupełnić do bazy w V_2: $(v_1,\dots,v_k, w_1,\dots,w_m)$ tzn. $\dim V_2 = k+m$.

Pokażemy, że $(v_1,\dots,v_k, w_1,\dots,w_m, u_1,\dots,u_\ell)$ jest liniowo niezależny:
$a_1v_1 + \dots + a_kv_k + b_1w_1 + \dots + b_mw_m + c_1u_1 + \dots + c_\ell w_\ell = 0$

$$r = \underbrace{a_1v_1 + \dots + a_kv_k + b_1w_1 + \dots + b_mw_m}_{\in V_1} = \underbrace{-c_1u_1 - \dots - c_\ell w_\ell}_{\in V_2}$$

$r\in V_1$ i $r\in V_2$ tzn $r\in V_1\cap V_2$
ale to oznacza że
$r\in \operatorname{span}\langle v_1,\dots,v_k\rangle$ i

wtedy $b_1 = \dots = b_m = 0$ oraz $c_1 = \dots = c_\ell = 0$
wtedy

$r = a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0$ i z liniowej niezależności $v_1 \dots v_k$ mamy $a_1 = \dots = a_k = 0$.
Jest jasne, że $V_1+V_2 = \operatorname{span}\langle v_1 \dots, v_k, u_1,\dots,u_\ell, w_1 \dots w_m\rangle$ czyli

$\dim(V_1+V_2) = k+m+l = k+m+k+l-k = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ ■

JĄDRO i OBRAZ ODWZOROWANIA LINIOWEGO

DEFINICJA: $F: V \to W$ liniowe

obraz odwzorowanie liniowego

$\ker F = \{ v \in V : F(v) = 0 \}$ $\quad$ $\operatorname{im} F = \{ w \in W : \exists v \in V : F(v) = w \}$

jądro odwzorowanie liniowego (kernel)

STWIERDZENIE: $\ker F$ i $\operatorname{im} F$ są podprzestrzeniami wektorowymi.

DOWÓD:

(1) Niech $v_1, v_2 \in \ker F$. Wtedy dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mamy

$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \underset{0}{F(v_1)} + \lambda_2 \underset{0}{F(v_2)} = 0$, tzn $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \ker F$.

Jądro odwzorowanie liniowego jest zamknięte ze względu na branie kombinacji liniowych, więc jest p.p. wektorowe

(2) Niech $w_1, w_2 \in \operatorname{im} F$. Wtedy $w_1 = F(v_1)$ i $w_2 = F(v_2)$. Dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mamy

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$ zatem $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \operatorname{im} F$.

Obraz F także jest zamknięty ze względu na kombinacje liniowe a więc jest pp. wektorowe