ALGEBRA R. 6

Niech teraz $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ będzie dowolną rodziną podprzestrzeni w V wtedy

STWIERDZENIE

$$\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha \text{ jest podprzestrzenią wektorową.}$$

DOWÓD:
Należy pokazać że $\bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha =: X$ jest zamknięty ze względu na działanie. Weźmy $v_1, v_2 \in X$. Wiadomo że dla dowolnego $\alpha \in A$ $v_1, v_2 \in W_\alpha$, wtedy oczywiście $v_1 + v_2 \in W_\alpha$ oraz $\lambda v_1 \in W_\alpha$. Jest tak dla dowolnego α więc $v_1 + v_2 \in X$ i $\lambda v_1 \in X$ ∎

DEFINICJA Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami V. Zbiór

$$V_1 + V_2 = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \}$$ nazywamy

sumą algebraiczną podprzestrzeni V_1 i V_2.

STWIERDZENIE Suma algebraiczna jest podprzestrzenią wektorową

DOWÓD: Rozpaczliwie oczywisty:

Weźmy $w_1, w_2 \in V_1 + V_2$. Oznacza to, że $w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ dla $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ oraz $w_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ dla $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$

$$w_1 + w_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \underbrace{(\lambda_1 v_1 + \beta_1 u_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\lambda_2 v_2 + \beta_2 u_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$$

podobnie dla mnożenia ... ∎

TWIERDZENIE $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

DOWÓD:

Wybierzmy $v_1 \dots v_k$ - bazę przestrzeni $V_1 \cap V_2$. Jest to liniowo niezależny układ w V_1, można go więc uzupełnić do bazy V_1: $(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_\ell)$ tzn. m. in. że $\dim V_1 = k + \ell$, $\dim V_1 \cap V_2 = k$.
Z drugiej strony $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią V_2, więc $(v_1, \dots, v_k)$ można uzupełnić do bazy w V_2: $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m)$ tzn. $\dim V_2 = k + m$.

Pokażemy, że $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_\ell)$ jest liniowo niezależny:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_m w_m + c_1 u_1 + \dots + c_\ell w_\ell = 0$$

$$r = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 w_1 + \dots + b_m w_m}_{\in V_1} = \underbrace{- c_1 u_1 - \dots - c_\ell w_\ell}_{\in V_2}$$

$r \in V_1$ i $r \in V_2$ tzn $r \in V_1 \cap V_2$ ale to oznacza że $r \in \operatorname{span}\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ i

wtedy $b_1 = \dots = b_m = 0$ oraz $c_1 = \dots = c_\ell = 0$
wtedy

$r = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ i z liniowej niezależności $v_1 \dots v_k$ mamy $a_1 = \dots = a_k = 0$.

Jest jasne, że $V_1 + V_2 = \operatorname{span}\langle v_1 \dots, v_k, u_1, \dots, u_\ell, w_1 \dots w_m \rangle$ czyli

$\dim(V_1+V_2) = k+m+l = k+m+k+l-k = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ ■

JĄDRO i OBRAZ ODWZOROWANIA LINIOWEGO

DEFINICJA: $F: V \to W$ liniowe

obraz odwzorowanie liniowego

$\ker F = \{ v \in V : F(v) = 0 \}$ $\quad$ $\operatorname{im} F = \{ w \in W : \exists v \in V : F(v) = w \}$

jądro odwzorowanie liniowego (kernel)

STWIERDZENIE: $\ker F$ i $\operatorname{im} F$ są podprzestrzeniami wektorowymi.

DOWÓD:

(1) Niech $v_1, v_2 \in \ker F$. Wtedy dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mamy

$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \underbrace{F(v_1)}_{0} + \lambda_2 \underbrace{F(v_2)}_{0} = 0$, tzn $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \ker F$.

Jądro odwzorowanie liniowego jest zamknięte ze względu na branie kombinacji liniowych, więc jest p.p. wektorową

(2) Niech $w_1, w_2 \in \operatorname{im} F$. Wtedy $w_1 = F(v_1)$ i $w_2 = F(v_2)$. Dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mamy

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$ zatem $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \operatorname{im} F$.

Obraz F także jest zamknięty ze względu na kombinacje liniowe a więc jest pp. wektorową

SUMA PROSTA

Mając dwie przestrzenie wektorowe U i W możemy skonstruować trzecią przestrzeń, która jako zbiór jest iloczynem kartezjańskim $V = U \times W$ a działania są „po współrzędnych", tzn

$(u_1, w_1) + (u_2, w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2)$ $\quad$ $\alpha(u, w) = (\alpha u, \alpha w)$

Taką przestrzeń wektorową nazywamy sumą prostą U i W oraz piszemy $V = U \oplus W$.
Czasami zdarza się sytuacja jak opisana w twierdzeniu:

STWIERDZENIE: Jeśli $U, W \subset V$ są podprzestrzeniami w V takimi, że $U + W = V$ i $U \cap W = \{0\}$ to V jest izomorficzna z sumą prostą $U \oplus V$.

DOWÓD: Skoro $V = U + W$ to każdy wektor $v \in V$ można zapisać jako $v = u + w$ dla $u \in U$, $w \in W$. Zazwyczaj w sumie algebraicznej podprzestrzeni ten zapis nie jest jednoznaczny. Tu natomiast jest ze względu na warunek $U \cap W = \{0\}$. Istotnie

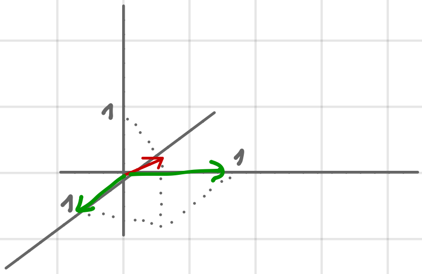
$v = u + w = u' + w'$ $\quad$ $\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W} \Longrightarrow u - u' = w - w' = 0$ tzn $u = u'$ i $w = w'$

Mamy zatem odwzorowanie $V \longrightarrow U \oplus W$ $\quad v \longmapsto (u, w)$ jeśli $v = u + w$. Łatwo sprawdzić, że to odwzorowanie jest izomorfizmem liniowym. ■

Jeśli zachodzi sytuacja jak w powyższym stwierdzeniu to zazwyczaj mówimy że V jest sumą prostą U i W a nie że jest izomorficzna z sumą prostą, choć to drugie sformułowanie jest zapewne właściwsze.

PRZYKŁADY

(1) $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : z=0 \right\} \oplus \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$



(2) $\mathbb{C}_3[\cdot] = V$

$$U = \{ v \in V : v(1) = v(2) = 0 \}, \quad W = \mathbb{C}_1[\cdot] = \langle 1, x \rangle$$

$$U = \langle (x-1)(x-2), \ x(x-1)(x-2) \rangle$$

ODWZOROWANIA LINIOWE (w szczególności z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$)

Powiedzieliśmy już, że wśród przestrzeni wektorowych skończonego wymiaru przestrzenie $\mathbb{K}^n$ odgrywają szczególną rolę. Dyskusję odwzorowań liniowych zaczniemy więc od dyskusji odwzorowań z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$. Zacznijmy od przykładu. Odwzorowaniem liniowym z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$ jest mnożenie przez macierz mającą n kolumn i m wierszy:

$$m \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & a^m_3 & \cdots & a^m_n \end{bmatrix}}_{n} \right. \qquad a^i_j \qquad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

numer wiersza

numer kolumny

jak działa macierz na wektor?

$$A = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & a^m_3 & \cdots & a^m_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & a^m_3 & \cdots & a^m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3 + \cdots + a^2_n x^n$$

Sprawdzamy liniowość $(Ax)^i = \sum_{k=1}^{n} a^i_k x^k$

$$[A(x+y)]^i = \sum_{k=1}^{n} a^i_k (x^k + y^k) = \sum_k a^i_k x^k + a^i_k y^k = \sum_k a^i_k x^k + \sum_k a^i_k y^k = (Ax)^i + (Ay)^i$$

$$[A(\lambda x)]^i = \sum_{k=1}^{n} a^i_k (\lambda x^k) = \lambda \sum_k a^i_k x^k = \lambda (Ax)^i$$

O.K — mnożenie przez macierz jest odwzorowaniem liniowym

STWIERDZENIE: każde odwzorowanie liniowe z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$ jest mnożeniem przez macierz mającą n kolumn i m wierszy.

DOWÓD: Dowód oparty jest na bardzo istotnej obserwacji, prawdziwej dla odwzorowań liniowych ogólnie rzecz biorąc bez ograniczeń w rodzaju ... dla przestrzeni wymiaru skończonego...

Odwzorowanie liniowe jest jednoznacznie określone przez podanie wartości na wektorach bazowych. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ mamy do dyspozycji bazę kanoniczną:

$$(e_1, \dots, e_n) \quad : \quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

Odwzorowanie liniowe $F: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ wyznaczone więc będzie poprzez podanie wartości $F(e_i) \in \mathbb{K}^m$. Oznaczmy

$$F(e_i) = \begin{bmatrix} f^1_i \\ f^2_i \\ \vdots \\ f^m_i \end{bmatrix}$$

wartość na dowolnym $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$ doliczymy używając liniowości F:

$$F\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}\right) = F(x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n) = x^1 F(e_1) + x^2 F(e_2) + \dots + x^n F(e_n) =$$

$$= \underbrace{x^1 \begin{bmatrix} f^1_1 \\ f^2_1 \\ \vdots \\ f^m_1 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} f^1_2 \\ f^2_2 \\ \vdots \\ f^m_2 \end{bmatrix} + \dots + x^n \begin{bmatrix} f^1_n \\ f^2_n \\ \vdots \\ f^m_n \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x^1 f^1_1 + x^2 f^1_2 + \dots + x^n f^1_n \\ x^1 f^2_1 + x^2 f^2_2 + \dots \; x^n f^2_n \\ \vdots \\ x^1 f^m_1 + x^2 f^m_2 + \dots + x^n f^m_n \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} f^1_1 & f^1_2 & \cdots & f^1_n \\ f^2_1 & f^2_2 & \cdots & f^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_1 & f^m_2 & \cdots & f^m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

Okazuje się że kolumnami macierzy odpowiadającej F są wartości F na wektorach bazy kanonicznej. ■

Dowód powyższego stwierdzenia jest nieskomplikowany, ale wynikają z niego ważne wnioski

① Z fragmentu zaznaczonego na zielono wynika że $\operatorname{im} F$ jest podprzestrzenią rozpiętą przez kolumny macierzy F. 28

② Z fragmentu zaznaczonego na różowo wynika, że $\ker F$ to przestrzeń rozwiązań układu równań liniowych jednorodnych (tzn z prawą stroną równą zero). Współczynniki tych równań tworzą wiersze macierzy.

SKŁADANIE ODWZOROWAŃ – MNOŻENIE MACIERZY

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G\circ F"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "G"] & \mathbb{K}^l \end{tikzcd}$$

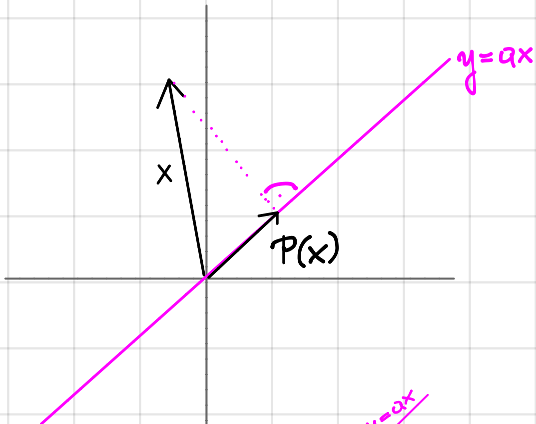
Załóżmy, że znamy macierze F i G. Jak wygląda macierz złożenia?

$$(Fx)^i = \sum_{k=1}^{n} f^i{}_k x^k \qquad (Gy)^j = \sum_{i=1}^{m} g^j{}_i y^i$$

$$G(F(x)) = \sum_{i=1}^{m} g^j{}_i \left(\sum_{k=1}^{n} f^i{}_k x^k\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g^j{}_i f^i{}_k x^k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{m} g^j{}_i f^i{}_k\right]}_{\text{wyrazy macierzowe złożenia}} x^k$$

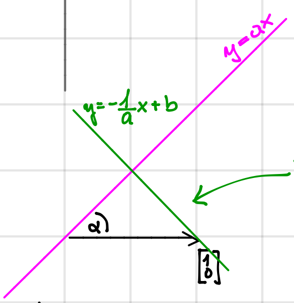
$$(G\circ F)^j{}_k = \sum_{i=1}^{m} g^j{}_i f^i{}_k$$

PRZYKŁAD: $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. P jest rzutem na prostą $y=ax$. Znaleźć macierz P.



Kolumnami macierzy P są wartości P na wektorach $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Szukamy $P\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$



$\operatorname{tg}\alpha = a$

prosta prostopadła do $y=ax$ przechodząca przez $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$y = -\frac{1}{a}x + b$

$0 = -\frac{1}{a}\cdot 1 + b$

$b = \frac{1}{a}$

$P\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ to punkt wspólny

$y = ax$ i $y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$

$ax = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)x = \frac{1}{a}$

$x = \frac{1}{1+a^2} \quad y = \frac{a}{1+a^2}$

Pierwsza kolumna macierzy: $\begin{bmatrix}\frac{1}{1+a^2}\\ \frac{a}{1+a^2}\end{bmatrix}$. Szukamy $P\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$: Prosta $y=-\frac{1}{a}x+c$ przechodząca przez $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, tzn $c=1$. $P\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ to punkt wspólny $y=ax$ i $y=-\frac{1}{a}x+1$

$$ax=-\frac{1}{a}x+1 \qquad \frac{a^2+1}{a}x=1 \qquad x=\frac{a}{1+a^2} \qquad y=\frac{a^2}{1+a^2}$$

$$P=\frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}$$

$$P^2=\frac{1}{(1+a^2)^2}\begin{bmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+a^2 & a+a^3\\ a+a^3 & a^2+a^4\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{(1+a^2)^2}=\frac{1}{(1+a^2)}\begin{bmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}=P \quad \text{o.k.}$$