ALGEBRA R 7

ALGEBRA R WYKŁAD 7

Przypomnienie najważniejszych wniosków z poprzedniego wykładu (1) Odwzorowania liniowe z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$ to macierze mające n kolumn i m wierszy, wyrazy macierzowe są elementami z ciała $\mathbb{K}$. (2) Obraz odwzorowania z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$ jest rozpięty przez kolumny macierzy. (3) Jądro odwzorowania to przestrzeń rozwiązań układu równań – współczynniki poszczególnych równań stanowią wiersze macierzy. (4) Kolumny macierzy to obrazy wektorów z bazy kanonicznej względem odwzorowania zadanego przez tę macierz

MACIERZ ODWZOROWANIA LINIOWEGO: Wiemy już, że $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = M_{n\times m}(\mathbb{K})$
A w jaki sposób reprezentować odwzorowanie liniowe między innymi przestrzeniami wektorowymi? Weźmy przykład:

$$V = \mathbb{R}_2[\,] \qquad W = M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad F \in L(V,W) \quad F(v) = v\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\right)$$

Obserwacja, że odwzorowanie jest jednoznacznie zdefiniowane poprzez podanie wartości na wektorach bazowych jest prawdziwe także w tym przypadku. Wybierzmy bazę w V:

$$b = (b_1(t) = 0,\ b_2(t) = t,\ b_3(t) = t^2)$$

Żeby znać F wystarczy wiedzieć ile jest $F(b_1)$, $F(b_2)$ $F(b_3)$

$$F(b_1) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad F(b_2) = \begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix} \qquad F(b_3) = \begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{bmatrix}$$

Dowolny wielomian jest kombinacją liniową wielomianów bazowych, więc znając wartości F na bazowych obliczymy – biorąc kombinacje liniowe – wartości F na dowolnym wielomianie. Można jednak pójść dalej: Wybór bazy w V zadaje izomorfizm V z $\mathbb{K}^n$ dla $n = \dim V$. W naszym przypadku baza e definiuje $\Lambda_b : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Podobnie wybór bazy w W zadaje izomorfizm, tym razem z $\mathbb{R}^4$. Weźmy bazę

$$x = \Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{X_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{X_2}, \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{X_3}, \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{X_4}\Big).$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Lambda_b"'] & W \arrow[d, "\Lambda_x"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

Wybranie bazy w dziedzinie i przeciwdziedzinie powoduje, że odwzorowanie liniowe można zapisać jako macierz!

$$\Lambda_x \circ F \circ \Lambda_e^{-1} \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$$

To jest macierz!!!

Jak wygląda ta macierz? Zgodnie z naszym wcześniejszym doświadczeniem kolumny macierzy to obrazy wektorów z bazy kanonicznej. Obliczamy więc

$$\Lambda_x \circ F \circ \Lambda_b^{-1}(e_i) \quad i=1,2,3$$

W odwzorowaniu Λ_b wektory b_1, b_2, b_3 przechodzą na e_1, e_2, e_3 w $\mathbb{R}^3$

$$\Lambda_x \circ F \circ \Lambda_b^{-1}(e_i) = \Lambda_x \circ F(b_i) = [F(b_i)]^x$$

Kolumny macierzy odwzorowania F w bazach b i X to obrazy wektorów b_i zapisane w bazie X

$$F(b_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot X_1 + 1 \cdot X_4$$

$$F(b_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = X_1 + 2X_2 - 2X_3 + X_4$$

$$F(b_3) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = -3X_1 + 4X_2 - 4X_3 - 3X_4$$

$$[F(b_1)]^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [F(b_2)]^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [F(b_3)]^x = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[F]_b^x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}}$$

Jak to działa? Mnożąc wektory zapisane w b przez tę macierz otrzymujemy obrazy wektorów względem F zapisane w bazie X

$$[F]_b^x [v]^b = [F(v)]^x$$

PRZYKŁAD: Nawet w $\mathbb{K}^n$ czasami przydaje się używanie innej bazy. Zadanie: Ciąg (x_n) liczb rzeczywistych zadany jest w sposób rekurencyjny wzorem $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 3$. Znaleźć jawny wzór na x_n, tzn. wyrazić x_n jako funkcję n.

Rozwiązanie: Zapiszmy definicję x_n w nietypowy sposób:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} \quad \text{tzn} \quad \begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 2x_{n-2} \\ x_{n-1} &= x_{n-1} \end{aligned}$$

drugie równanie jest może trywialne, ale prawdziwe

Stosując tę rekurencję wielokrotnie otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A \cdot A \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix} = \dots = \underbrace{A \cdots A}_{n-2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = A^{n-2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problem sprowadza się do policzenia potęgi macierzy A.

Zrobienie tego wprost poprzez wielokrotne mnożenie jest trudne jeśli nie niemożliwe. Jednak istnieje sprytny sposób radzenia sobie z tym problemem. Potraktujmy A jak element $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ i zapiszmy to odwzorowanie w bazie innej niż kanoniczna. Właściwa będzie baza

$f=(f_1,f_2)$ $f_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $f_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ Są to szczególnie dobrane wektory bazowe

$Af_1=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-f_1$ $\quad Af_2=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2f_2$ $\quad [Af_1]^f=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ $[Af_2]^f=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

Zatem $[A]^f_f=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$ Taką macierz łatwo jest podnieść do dowolnej potęgi:

$\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}^{n-2}=\begin{bmatrix}(-1)^{n-2}&0\\0&2^{n-2}\end{bmatrix}$ $\leftarrow$ to jest $[A^{n-2}]^f_f$ a my potrzebujemy $A^{n-2}=[A^{n-2}]^e_e$

Stajemy więc przed ogólnym problemem – jak zamienić bazy w macierzy odwzorowania. Zauważmy że zmianę bazy traktować można jak działanie odwzorowania identycznościowego w różnych bazach. Np:

$$[v]^f=[id_{\mathbb{R}^2}(v)]^f=[id_{\mathbb{R}^2}]^f_e[v]^e$$ i odwrotnie

$$[v]^e=[id_{\mathbb{R}^2}(v)]^e=[id_{\mathbb{R}^2}]^e_f[v]^f$$

Niebieska i zielona macierz mają tę własność, że pomnożone w dowolnej kolejności dają $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. Mówimy że są to macierze odwrotne

Wróćmy do odwzorowania: Mamy $[A^{n-2}]^f_f$ a chcemy mieć $[A^{n-2}]^e_e$

$$[id_{\mathbb{R}^2}]^e_f\cdot \backslash \qquad [A^{n-2}v]^f=[A^{n-2}]^f_f[v]^f=[A^{n-2}]^f_f[id_{\mathbb{R}^2}]^f_e[v]^e$$

$$\underbrace{[id_{\mathbb{R}^2}]^e_f[A^{n-2}v]^f}_{[A^{n-2}v]^e}=\underbrace{[id_{\mathbb{R}^2}]^e_f[A^{n-2}]^f_f[id_{\mathbb{R}^2}]^f_e}_{[A^{n-2}]^e_e}[v]^e$$

Co to jest $[id_{\mathbb{R}^2}]^e_f$? Kolumny tej macierzy to wektory z bazy f zapisane w bazie e czyli $\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}$, ta druga macierz to $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}$

$$A^{n-2}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{n-2}&0\\0&2^{n-2}\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{n-2}&(-2)(-1)^{n-2}\\2^{n-2}&2^{n-2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}(-1)^n+2^{n-1}&(-2)(-1)^n+2^{n-1}\\-(-1)^n+2^{n-2}&2(-1)^n+2^{n-2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_n\\x_{n-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}(-1)^n+2^{n-1}&(-2)(-1)^n+2^{n-1}\\-(-1)^n+2^{n-2}&2(-1)^n+2^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$ potrzebujemy tylko x_n:

$$x_n=\frac{1}{3}\left(3(-1)^n+3\cdot 2^{n-1}+(-2)(-1)^n+2^{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left((-1)^n+4\cdot 2^{n-1}\right)=\frac{1}{3}\left[(-1)^n+2^{n+1}\right]$$

Przy pomocy tego przykładu nauczyliśmy się (1) zapisywać macierz odwzorowanie w wybranej bazie (2) zamieniać bazy w zapisie wektorów i odwzorowań przy pomocy mnożenie przez odpowiednie macierze.

PEWIEN WAŻNY WZÓR: Wróćmy teraz do ogólnych odwzorowań liniowych. Udowodnimy teraz pewien przydatny wzór:

STWIERDZENIE: $F \in L(V,W)$ $\quad \dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F$

DOWÓD:

Przypomnijmy, że $\ker F \subset V$ jest podprzestrzenią wektorów spełniających $F(v)=0$, zaś $\operatorname{im} F \subset W$ to obraz odwzorowania F. Załóżmy najpierw, że $\dim \ker F = m > 0$ i weźmy bazę $(v_1, \dots, v_m)$ podprzestrzeni $\ker F$. Bazę tę można uzupełnić do bazy całej przestrzeni V: $(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$. Oczywiście

$$\operatorname{im} F = \operatorname{Span}(\underset{= 0}{F(v_1)}, \dots, \underset{= 0}{F(v_m)}, F(v_{m+1}), \dots, F(v_n)) = \operatorname{Span}(F(v_{m+1}), \dots, F(v_n))$$

Pokażemy, że $F(v_{m+1}), \dots, F(v_n)$ są liniowo niezależne:

$$0 = \lambda_1 F(v_{m+1}) + \dots + \lambda_{n-m} F(v_n) = F(\lambda_1 v_{m+1} + \dots + \lambda_{n-m} v_n) \Rightarrow \lambda_1 v_{m+1} + \dots + \lambda_{n-m} v_n \in \ker F$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 v_{m+1} + \dots + \lambda_{n-m} v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$$

$$\lambda_1 v_{m+1} + \dots + \lambda_{n-m} v_n - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_m v_m = 0 \quad \text{ale } (v_1, \dots, v_n) \text{ to baza, więc}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-m} = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$$

Skoro $F(v_{m+1}), \dots, F(v_n)$ są liniowo niezależne i rozpinają $\operatorname{im} F$ to $\dim \operatorname{im} F = n-m$. Mamy więc $\dim V = n$, $\dim \ker F = m$ i $\dim \operatorname{im} F = n-m$. Zachodzi więc równość

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F. \quad \blacksquare$$