# ALGEBRA R 8

# ALGEBRA WIELOLINIOWA

W trakcie poprzednich wykładów rozważaliśmy odwzorowania liniowe $L(V,W)$. Teraz zajmiemy się bliżej przestrzenią odwzorowań $L(V,\mathbb{K})$. Zauważmy najpierw, że jeśli $V,W$ są p.w. nad ciałem $\mathbb{K}$, to przestrzeń $L(V,W)$ także jest p.w. nad $\mathbb{K}$ z następującymi operacjami:

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v)$$
$$(\lambda F)(v) = \lambda F(v)$$

Są to te same operacje, które rozważaliśmy dyskutując przestrzeń odwzorowań na dowolnym zbiorze $X$ o wartościach w przestrzeni wektorowej $(W)$. Jeśli $X=V$ tzn $X$ jest przestrzenią wektorową to $L(V,W) \subset Map(V,W)$ jest podprzestrzenią wektorową tej przestrzeni. Rozważymy teraz szczególny przypadek $W=\mathbb{K}$.

**DEFINICJA** Niech $V$ będzie p.w. nad $\mathbb{K}$. Przestrzeń wektorową $L(V,\mathbb{K})$ nazywamy **przestrzenią sprzężoną** albo **przestrzenią dualną** do przestrzeni $V$ i oznaczamy $V^*$ lub $V'$. Ja będę używać raczej oznaczenie $V^*$. Elementy przestrzeni $V^*$ nazywamy **funkcjonałami liniowymi** na $V$ lub **kowektorami**.

**OBSERWACJA**: Jeśli $\dim V < \infty$ to wybierając bazę w $V$ elementy $V^* = L(V,\mathbb{K})$ reprezentować możemy jako macierze mające $n = \dim V$ kolumn i jeden wiersz, tzn. tzw. wektory wierszowe. Jeśli $e=(e_1,\dots,e_n)$ jest bazą w $V$ a $\varphi \in V^*$, to

$$[\varphi]_e^1 = [\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \dots \quad \varphi(e_n)]$$

baza kanoniczna w $\mathbb{K}$ składająca się z jedynki

**NOTACJA**: Z powodów, które wkrótce staną się jasne używa się specjalnej notacji na oznaczenie wartości funkcjonału $\varphi$ na wektorze $v$. Zamiast $\varphi(v)$ piszemy często $\langle \varphi, v \rangle$

**PRZYKŁADY**:

(1) $V = \mathbb{K}^n \qquad \varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_n] \in (\mathbb{K}^n)^* \quad (\mathbb{K}_n)$

(2) $V = \mathbb{K}[\cdot]$ Każdy element $a \in \mathbb{K}$ definiuje funkcjonał liniowy $\varphi_a$ wzorem

$$\langle \varphi_a, v \rangle = v(a)$$

(3) $V = \mathbb{K}[\cdot] \quad \varphi(v) = v'(0)$ jest funkcjonałem liniowym $\quad \psi(v) = \int_0^1 v(t)\,dt$ jest funkcjonałem liniowym.

**STWIERDZENIE** Niech $v \in V$, $v \neq 0$. Wówczas istnieje $\varphi \in V^*$ taki, że $\langle \varphi, v \rangle = 1$

**DOWÓD**. Wektor $v \neq 0$ można uzupełnić do bazy $\mathcal{B}$. Funkcjonałem liniowym którego szukamy jest funkcjonał przypisujący wektorowi $w \in V$ współczynnik przy $v$ w rozkładzie $w$ w bazie $B$.

STWIERDZENIE Niech $\dim V < \infty$. Dla każdej bazy $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ istnieje baza $\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots \varepsilon^n)$ przestrzeni $V^*$ taka, że

$$\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$$

symbol Kroneckera $\delta^i_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

DOWÓD: Niech $V$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową z wybraną bazą $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Oznacza to że każdy wektor możemy w sposób jednoznaczny zapisać jako kombinację liniową wektorów bazowych:

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \dots + v^n e_n$$

Oznaczmy teraz $\varepsilon^i : V \longrightarrow \mathbb{K}$ $\langle \varepsilon^i, v \rangle = v^i$. Układ $(\varepsilon^1, \dots \varepsilon^n)$ jest szukaną bazą. Sprawdzimy liniową niezależność: załóżmy, że $a_1 \varepsilon^1 + \dots + a_n \varepsilon^n = 0$. Oznacza to że dla każdego $v \in V$

$$\langle a_1 \varepsilon^1 + \dots + a_n \varepsilon^n, v \rangle = 0$$

Biorąc kolejno jako $v$ wektory $e_i$ otrzymujemy $\forall_i \ a_i = 0$

Sprawdźmy teraz, że $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ rozpina całą przestrzeń. Weźmy dowolny kowektor $\varphi \in V^*$. Wtedy

$$\langle \varphi, v \rangle = \langle \varphi, v^1 e_1 + \dots + v^n e_n \rangle = \underbrace{v^1}_{\langle \varepsilon^1, v \rangle} \langle \varphi, e_1 \rangle + \dots + \underbrace{v^n}_{\langle \varepsilon^n, v \rangle} \langle \varphi, e_n \rangle =$$

$$= \langle \varepsilon^1, v \rangle \langle \varphi, e_1 \rangle + \dots + \langle \varepsilon^n, v \rangle \langle \varphi, e_n \rangle =$$

$$= \langle \langle \varphi, e_1 \rangle \varepsilon^1, v \rangle + \dots + \langle \langle \varphi, e_n \rangle \varepsilon^n, v \rangle =$$

$$\langle \langle \varphi, e_1 \rangle \varepsilon^1 + \dots + \langle \varphi, e_n \rangle \varepsilon^n, v \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \langle \varphi, e_1 \rangle \varepsilon^1 + \dots + \langle \varphi, e_n \rangle \varepsilon^n$$

Układ $(\varepsilon^1, \dots \varepsilon^n)$ jest bazą w $V^*$. ■

WNIOSEK: $\dim V^* = \dim V$ dla skończeniewymiarowych przestrzeni wektorowych.

# PRZYKŁAD

$V=\mathbb{R}_2[\cdot]$ (1) Pokazać że funkcjonały liniowe $(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)$ tworzą bazę $V^*$ (2) Znaleźć taką bazę $(v_1,v_2,v_3)$ w $V$, że $\varphi^i(v_j)=\delta^i_j$ (3) Rozłożyć na składowe w bazie $(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)$ funkcjonał $\omega\mapsto\int_0^1\omega(t)dt$

$\varphi^1(\omega)=\omega(-1)\quad \varphi^2(\omega)=\omega(0)\quad \varphi^3(\omega)=\omega(1)$

ROZWIĄZANIE Wiadomo, że $\dim V=3$, wobec tego $\dim V^*=3$, zatem jedyna rzecz, którą trzeba sprawdzić, to fakt, że układ $(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)$ jest liniowo niezależny. Trzeba zatem wykazać, że jeśli $\lambda_1\varphi^1+\lambda_2\varphi^2+\lambda_3\varphi^3=0$ to $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

to jest odwzorowanie, wobec tego jego znikanie oznacza że ma ono wartość 0 na każdym argumencie

$$\lambda_1\varphi^1+\lambda_2\varphi^2+\lambda_3\varphi^3=0\ \equiv\ \forall\omega\in\mathbb{R}_2[\cdot]\ \ \lambda_1\varphi^1(\omega)+\lambda_2\varphi^2(\omega)+\lambda_3\varphi^3(\omega)=0$$

Wybieramy teraz wygodne trzy wektory

$$\omega_1(t)=(t-1)t$$
$$\omega_2(t)=(t+1)t$$
$$\omega_3(t)=(t-1)(t+1)$$

Po wstawieniu do ⎵ otrzymujemy

$$0=\lambda_1\varphi^1(\omega_1)+\lambda_2\varphi^2(\omega_1)+\lambda_3\varphi^3(\omega_1)=\lambda_1\cdot 2\ \Rightarrow\ \lambda_1=0$$
$$0=\lambda_1\varphi^1(\omega_2)+\lambda_2\varphi^2(\omega_2)+\lambda_3\varphi^3(\omega_2)=-\lambda_3\ \Rightarrow\ \lambda_3=0$$
$$0=\lambda_1\varphi^1(\omega_3)+\lambda_2\varphi^2(\omega_3)+\lambda_3\varphi^3(\omega_3)=\lambda_2\cdot 2\ \Rightarrow\ \lambda_2=0$$

Korzystając z trzech sprytnie wybranych wektorów dostaliśmy jednoznaczne rozwiązanie na współczynniki, zatem innych $\omega$ nie trzeba już używać.

Problem (1) został rozwiązany – $(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)$ jest bazą w $V^*$

Wybór tych właśnie wektorów był podyktowany wygodą rozwiązywania równań. Dla innego wyboru (trzy liniowo niezależne $\omega$) też dostaniemy ten sam wniosek, tylko układ równań będzie trudniejszy

(2) Patrząc na układ wielomianów $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ łatwo możemy odgadnąć postać wektorów bazy dualnej do $\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3$. Wielomiany $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ są takie, że każdy z nich należy do jądra dwóch spośród trzech form $\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3$. Od bazy dualnej różnią się tylko tym, że ten trzeci kowektor daje na wektorze liczbę inną niż 1:

$$\langle\varphi^1,w_1\rangle=w_1(-1)=(-1-1)(-1)=-2\cdot(-1)=2$$
$$\langle\varphi^2,w_3\rangle=w_3(0)=(-1)(1)=-1\qquad\Rightarrow$$
$$\langle\varphi^3,w_2\rangle=w_2(1)=2\cdot 1=2$$

$$f_1=\tfrac{1}{2}w_1,\quad f_2=-w_3,\quad f_3=\tfrac{1}{2}w_2$$

Baza dualna do $(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)$ to baza $(f_1,f_2,f_3)$ gdzie $f_1(t)=\frac{1}{2}(t-1)t$
$f_2(t)=(1-t)(t+1)\quad f_3(t)=\frac{1}{2}(t+1)t$

Rozkładanie funkcjonału w bazie $\varphi$ jest proste, jeśli znamy bazę dualną.
Istotnie

$$\alpha = a_1\varphi^1 + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3$$

$$\langle \alpha, f_1\rangle = \langle a_1\varphi^1 + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3, f_1\rangle = a_1\overset{=1}{\langle \varphi^1, f_1\rangle} + a_2\overset{=0}{\langle \varphi^2, f_1\rangle} + a_3\overset{=0}{\langle \varphi^3, f_1\rangle} = a_1$$

$$\langle \alpha, f_2\rangle = a_2$$

$$\langle \alpha, f_3\rangle = a_3$$

$$\alpha(w) = \int_0^1 w(t)dt \qquad \langle \alpha, f_1\rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 (t-1)t\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$$

$$\langle \alpha, f_2\rangle = \int_0^1 (1-t)(t+1)\,dt = \int_0^1 (1-t^2)\,dt = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \langle \alpha, f_3\rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 (t+1)t\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{12}\varphi^1 + \frac{2}{3}\varphi^2 + \frac{5}{12}\varphi^3}$$