ALGEBRA R 9

Merytoryczna zawartość wykładu: Kanoniczny izomorfizm $V \simeq V^{**}$, pojęcie anihilatora podprzestrzeni, odwzorowanie sprzężone, macierz odwzorowania sprzężonego, rząd wierszowy, rząd kolumnowy rząd macierzy.

Zdefiniowaliśmy na poprzednim wykładzie przestrzeń $V^* = L(V, \mathbb{K})$, omówiliśmy jej własności i podaliśmy definicję bazy dualnej. W szczególności V^* jest po prostu przestrzenią wektorową (stąd rozważanie baz, wymiarów itd), można więc zapytać o przestrzeń $(V^*)^*$, tzn o przestrzeń dualną do przestrzeni dualnej do przestrzeni wektorowej. Jest to pewnie wyzwanie dla Państwa zdolności do abstrakcyjnego myślenia.

$(V^*)^*$: Zauważmy przede wszystkim że każdy element $v \in V$ definiuje liniowe odwzorowanie na V^* przy pomocy ewaluacji. Odwzorowanie to oznaczamy f_v

$$f_v : V^* \longrightarrow \mathbb{K} \qquad f_v(\varphi) = \varphi(v) \qquad , \; f_v \in L(V^*, \mathbb{K}) = (V^*)^*$$

STWIERDZENIE: Jeśli $v \neq w$ to także $f_v \neq f_w$

Do udowodnienia tego stwierdzenia przydatny będzie pewien lemat: **LEMAT:** Dla każdego niezerowego wektora $u \in V$ istnieje $\varphi \in V^*$ takie, że $\varphi(u) = 1$.

DOWÓD LEMATU: Uzupełniamy u do bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V. Jako φ bierzemy funkcjonał przyporządkowujący wektorowi jego pierwszą współrzędną w rozkładzie wektora w bazie $\mathcal{B}$. ■

DOWÓD STWIERDZENIA:

Jeśli $v \neq w$ to $v - w \neq 0$ i istnieje $\varphi \in V^*$ taki, że $\varphi(v-w) = 1$, tzn $\varphi(v) = 1 + \varphi(w)$. Żeby pokazać, że $f_v \neq f_w$ wystarczy wskazać jeden argument w którym oba te odwzorowania przyjmują różne wartości. Tym argumentem – elementem V^* – jest wskazane przez nas wcześniej φ:

$$f_v(\varphi) = \varphi(v) = 1 + \varphi(w) = 1 + f_w(\varphi) \qquad f_v(\varphi) \neq f_w(\varphi)$$ ■

Powyższe stwierdzenie pokazuje, że przyporządkowanie $V \ni v \longmapsto f_v \in (V^*)^*$ jest injektywne. I to jest mniej więcej tyle ile można powiedzieć w ogólnym przypadku. Jeśli natomiast $\dim V < \infty$ to zachodzi twierdzenie:

TWIERDZENIE: Jeśli V jest p.w. skończonego wymiaru to istnieje kanoniczny izomorfizm $V \simeq V^{**}$

DOWÓD: Obie te przestrzenie są jednakowego wymiaru: $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$. Są więc oczywiście izomorficzne jako p.w. Kanonicznym, tzn wyróżnionym w sposób naturalny izomorfizmem jest odwzorowanie $V \ni v \overset{\Phi}{\longmapsto} f_v \in V^{**}$. Zauważmy, że jest to odwzorowanie liniowe:

$$v + w \longmapsto f_{v+w} \quad f_{v+w}(\varphi) = \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = f_v(\varphi) + f_w(\varphi) \quad \text{tzn} \quad f_{v+w} = f_v + f_w$$
$$\lambda v \longmapsto f_{\lambda v} \quad f_{\lambda v}(\varphi) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda \cdot f_v(\varphi) \quad \text{tzn} \quad f_{\lambda v} = \lambda f_v$$

Przed sformułowaniem twierdzenia wykazaliśmy już, że $\Phi : v \longmapsto f_v$ jest różnowartościowe. Skoro Φ jest liniowe, to fakt ten formułujemy pisząc $\ker \Phi = \{0\}$. Z bilansu wymiarów

$$\dim V = \underbrace{\dim \ker \Phi}_{=0} + \dim \operatorname{im} \Phi = \dim \operatorname{im} \Phi$$

Skoro więc $\dim \operatorname{im} \Phi = \dim V = \dim V^*$ to znaczy, że $\operatorname{im} \Phi = V^*$, zatem Φ jest surjekcją. Podsumowując, Φ jest liniowe, jest injekcją, surjekcją, jest więc izomorfizmem ■

Kanoniczny izomorfizm $V \simeq V^{**}$ pokazuje że na parę V i V^* należy patrzeć symetrycznie jako na parę dualną: V^* jest dualne do V i V jest dualne do V^*. Stąd koncepcja używania bardziej symetrycznej notacji na oznaczenie $\varphi(v)$ dla $\varphi \in V^*$ i $v \in V$: zamiast $\varphi(v)$ pisać będziemy $\langle \varphi, v \rangle$

Taka notacja pojawia się w mechanice kwantowej. Elementy V^* oznacza się $\langle \varphi|$ i nazywa **bra** a elementy V oznacza $|v\rangle$ i nazywa **ket**. Razem, ewaluacja jednego na drugim to **bracket** $\langle \varphi | v \rangle$

ANIHILATOR

Niech $X \subset V$ będzie podprzestrzenią wektorową. Definiujemy X° wzorem

$$X^\circ = \{ \varphi \in V^* : \forall v \in X \ \ \varphi(v) = 0 \} \subset V^*$$

STWIERDZENIE X° jest podprzestrzenią wektorową

DOWÓD:

Niech φ i $\psi \in X^\circ$, wtedy $a\varphi + b\psi$ obliczone na $v \in X$ daje, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{K}$:

$$(a\varphi + b\psi)(v) = a\underbrace{\varphi(v)}_{=0} + b\underbrace{\psi(v)}_{=0} = 0 \text{, zatem } a\varphi + b\psi \in X^\circ. \ \blacksquare$$

X° nazywamy **anihilatorem** podprzestrzeni X.

PRZYKŁAD: Niech $V = \mathbb{R}^3$, $X = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ wtedy X° zawiera wszystkie kowektory spełniające

$$[\alpha \ \beta \ \gamma] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ tzn } \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \implies \alpha = -\beta - \gamma$$

X° jest więc rozpięta przez $[1 \ -1 \ 0]$ i $[1 \ 0 \ -1]$

$$X^\circ = \langle [1 \ -1 \ 0], [1 \ 0 \ -1] \rangle$$

STWIERDZENIE: Jeśli $\dim V < \infty$ to $\dim X^\circ = \dim V - \dim X$

DOWÓD: Oznaczmy $n = \dim V$, $k = \dim X$ i wybierzmy bazę X: $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, którą następnie uzupełnijmy do bazy V: $(x_1, x_2, \dots, x_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$. Utwórzmy także bazę dualną, której elementy oznaczymy φ^i: $(\varphi^1, \dots, \varphi^k, \varphi^{k+1} \dots \varphi^n)$. Twierdzę, że $X^\circ = \langle \varphi^{k+1}, \dots, \varphi^n \rangle$. Jest oczywiste, że $\langle \varphi^{k+1}, \dots, \varphi^n \rangle \subset X^\circ$ gdyż każdy z φ^i dla $i \geq k+1$ znika na elementach X.

Weźmy teraz $\alpha \in X^\circ$ i rozłóżmy α w bazie φ:

$$\alpha = \alpha_1 \varphi^1 + \dots + \alpha_k \varphi^k + \alpha_{k+1} \varphi^{k+1} + \dots + \alpha_n \varphi^n$$

Obliczając $\langle \alpha, x_i \rangle$ otrzymujemy

$$0 = \langle \alpha, x_i \rangle = \langle \alpha_1 \varphi^1 + \dots + \alpha_k \varphi^k + \alpha_{k+1} \varphi^{k+1} + \dots + \alpha_n \varphi^n, x_i \rangle = \alpha_1 \langle \varphi^1, x_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle \varphi^k, x_i \rangle + \alpha_{k+1} \underbrace{\langle \cancel{\varphi^{k+1}}, x_i \rangle}_{\text{0 dla indeksów} > k} + \dots$$

$= \alpha_i$ Jeśli $\alpha \in X^\circ$ to $\alpha_i = 0$, ostatecznie

$\alpha = \alpha_{k+1} \varphi^{k+1} + \dots + \alpha_n \varphi^n$, zatem $X^\circ \subset \langle \varphi^{k+1}, \dots, \varphi^n \rangle$. Mamy zawieranie w obie strony, więc równość. Kowektory $\varphi^{k+1} \dots \varphi^n$ są liniowo niezależne, więc $\dim X^\circ = n - k = \dim V - \dim X$. $\blacksquare$

ODWZOROWANIE SPRZĘŻONE:

Niech V i W będą dwiema przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K}$.

STWIERDZENIE: Dla każdego $F \in L(V,W)$ istnieje jednoznacznie określone odwzorowanie $F^* \in L(W^*, V^*)$ zadane wzorem

$$\forall \varphi \in W^* \text{ i } v \in V \qquad \langle \varphi, F(v) \rangle = \langle F^*(\varphi), v \rangle$$

DOWÓD: Ten napis oznacza właściwie, że $F^*\varphi(v) = \varphi(F(v))$ tzn $F^*\varphi = \varphi \circ F$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "F^*\varphi = \varphi \circ F"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

PRZYKŁAD: $V = \mathbb{R}_2[\,]$, $W = \mathbb{R}^2$, $F \in L(V,W)$: $F(v) = \begin{bmatrix} v(1) \\ v'(1) \end{bmatrix}$ znaleźć F^*

Jako wstęp znajdźmy macierz F w jakichś bazach. W $\mathbb{R}^2$ wybierzmy bazę kanoniczną a w $\mathbb{R}_2[\,]$ bazę złożoną z jednomianów $u = (u_1(x) = x^2, u_2(x) = x, u_3(x) = 1)$

$$F(x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[F]_u^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Co to znaczy znaleźć F^*? To znaczy umieć policzyć F^* na każdym funkcjonale z $W^* = (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}_2$. Musimy więc wiedzieć co to jest

$F^*([\alpha \ \beta]) \in V^* = (\mathbb{R}_2[\,])^*$, zatem $F^*([\alpha \ \beta])$ musi się dać liczyć na wielomianach:

$$F^*([\alpha, \beta])(ax^2+bx+c) = [\alpha \ \beta]\, F(ax^2+bx+c) = [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} a+b+c \\ 2a+b \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha(a+b+c) + \beta(2a+b) = (\alpha+2\beta)a + (\alpha+\beta)b + c\alpha$$

Dostaliśmy więc jakiś wzór, który pozwala wyznaczyć $F^*([\alpha, \beta])$ na dowolnym wielomianie. Być może wygodniej będzie zapisać F^* jako macierz w bazach. W V^* wybierzemy bazę dualną do u a w W^* dualną do kanonicznej. W W^* będzie to więc $\varepsilon^1 = [1 \ 0]$ $\varepsilon^2 = [0 \ 1]$ a w V^* baza składająca się z funkcjonałów $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$

$$\gamma^1(ax^2+bx+c) = a$$
$$\gamma^2(ax^2+bx+c) = b$$
$$\gamma^3(ax^2+bx+c) = c$$

$$F^*\varepsilon^1 = F^*[1 \ 0]$$

$$F^*\varepsilon^1(\gamma^1) = 1 \quad F^*\varepsilon^1(\gamma^2) = 1 \quad F^*\varepsilon^1(\gamma^3) = 1$$

$$F^*\varepsilon^2 = F^*[0 \ 1] \quad F^*\varepsilon^2(\gamma^1) = 2 \quad F^*\varepsilon^2(\gamma^2) = 1 \quad F^*\varepsilon^2(\gamma^3) = 0$$

$$[F^*]^{\gamma}_{\varepsilon} = \left[[F^*\varepsilon^1]^{\gamma} \quad [F^*\varepsilon^2]^{\gamma} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[F]^{e}_{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad [F^*]^{\gamma}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze te mają ze sobą wiele wspólnego! Nie jest to przypadek. Macierz F^* w bazach ε i γ powstała z macierzy F w bazach e i u poprzez transpozycję, czyli zamianę wierszy na kolumny.

$$a \in M_{n\times m}(\mathbb{K}) \quad a^T \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad (a^T)^i{}_j = a^j{}_i$$

TWIERDZENIE: Niech $F \in L(V,W)$, niech także e i ε oraz f i φ będą parami baz dualnych w V i V^* oraz W i W^* odpowiednio. Wówczas

$$[F^*]^{\varepsilon}_{\varphi} = \left([F]^{f}_{e} \right)^T$$

DOWÓD:

Oznaczmy macierz $[F^*]^{\varepsilon}_{\varphi}$ literą A, a wyrazy macierzowe symbolami $A^i{}_j$. Z definicji macierzy odwzorowania $A^i{}_j$ jest współczynnikiem przy ε^i w rozkładzie kowektora $F^*(\varphi^j)$ w bazie ε. Oznacza to, że

$A^i_j = \langle F^*(\varphi^j), e_i \rangle = \langle \varphi^j, F(e_i) \rangle \leftarrow$ współczynnik przy f_j w rozkładzie $F(e_i)$ w bazie f a więc wyraz $\bullet^j{}_i$ macierzy $[F]^f_e = B$

$$A^i{}_j = B^j{}_i \text{, tzn } A = B^T \quad \blacksquare$$

DWA FAKTY O F^*

STWIERDZENIE 1 $F \in L(V,W)$ $G \in L(W,U)$ wówczas

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

STWIERDZENIE 2 $F \in L(V,W)$

$$\ker F^* = (\operatorname{im} F)^{\circ}$$