Zadania domowe z Algebry I R, seria 1.

24 października 2017

Zadanie 1. Obliczyć i narysować w układzie współrzędnych wszystkie wartości wyrażenia (a) $\sqrt{2+6i+3i\sqrt{3-4i}}$, (b) $\sqrt{3-8i+8\sqrt[3]{2+11i}}$.

Zadanie 2. Rozwiązać równania:

(a) $z^6 = (\bar{z}+1)^6$,

(b) $z^3(z+1) = (\bar{z}+1)$,

(c) $z^2 + 2\bar{z} + 6 = 0$,

(d) $(z-2)(\bar{z}-2) = -1+4i$,

(e) $\left(\frac{\bar{z}-1}{z+1}\right)^n = a$,

(f) $z^3 + (7+24i)\bar{z} = 0$.

Zadanie 3. Rozwiązać równania trzeciego i czwartego stopnia

(a) $z^3 - 3z + \sqrt{3} = 0$,

(b) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$,

(c) $z^4 + 6z^2 + 16z + 9 = 0$,

(d) $x^4 + 4x^3 - x - 4 = 0$.

Zadanie 4. Obliczyć wartość sumy

$$S = \cos 4^\circ + \cos 12^\circ + \cos 20^\circ + \cdots + \cos 172^\circ$$

Zadanie 5. Korzystając z własności symbolu $e^{i\varphi}$ pokazać, że W_n, $n \in \mathbb{N}$ zdefiniowane wzorem

$$W_n(\operatorname{tg}\varphi) = \frac{\cos n\varphi}{\cos^n \varphi}$$

są wielomianami

Zadanie 6. Opisać w zależności od parametru $p \in \mathbb{C}$ zbiór $Z_p = \{z : (iz+\bar{z})^2 = p\}$.

Zadanie 7. Korzystając z interpretacji geometrycznej liczb zespolonych znaleźć minimum funkcji $f(z) = |z+1| + |z-3|$ na zbiorze $L := \{z : |z-2| = |z-4i|\}$

Zadanie 8. Wyprowadzić wzory

(a) $\sum_{k=1}^n \sin^k \varphi = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\varphi \sin n\varphi}{2\sin\varphi}$,

(b) $\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cos(2k-n)\varphi = 2^n \cos^n \varphi$.

Zadanie 9. Opisać geometrycznie i narysować zbiór:

(a) $S := \{z : \left|\frac{z+3i}{z-3i}\right| = 2\}$,

(b) $S := \{z : -\frac{\pi}{4} < arg\frac{1+z}{1-z} < \frac{\pi}{4}\}$,

(c) $S := \{z : \Im\frac{z-1}{z(z+1} = 0\}$.

Zadanie 10. Zbadać i narysować zbiór $f^{-1}(S)$ jeśli $f(z) = z^3$, $S := \{z : \Re z > 0\}$.

Zadanie 11. Korzystając z symbolu Eulera sprawdzić tożsamości

$$\cos^4\varphi = \frac{1}{8}\left(3 + 4cos2\varphi + \cos 4\varphi\right), \qquad \sin^2\varphi = \frac{1}{16}\left(10\sin\varphi - 5\sin 3\varphi + sin5\varphi\right)$$

Zadanie 12. Wykazać, że jeśli $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$

to zachodzi równoważność

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ są wierzchołkami prostokąta}$$

Zadanie 13. Dowieść, że wielomian d jest dzielnikiem wielomianu w jeśli

(a) $d(x) = x^2 + 1$, $w(x) = (cos\varphi + x\sin\varphi)^n - \cos n\varphi - x\sin n\varphi$,

(b) $d(x) = x^2 - 2x\cos\varphi + 1$, $w(x) = x^n\sin\varphi - x\sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi$.

Kasia Grabowska