Zadania domowe z Algebry I R, seria 2.

14 listopada 2017

1. Dowieść, że jeżeli suma mnogościowa $V_1 \cup V_2$ dwóch podprzestrzeni $V_1, V_2 \subset V$ także jest podprzestrzenią, to $V_1 \subset V_2$ lub $V_2 \subset V_1$.

2. Niech $V := \mathbb{R}^T$ będzie przestrzenią funkcji $v : T \to \mathbb{R}$, gdzie $T := \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Określmy wektory (czyli funkcje) $v_0, \dots, v_5 \in V$ wzorami $v_k(t) := t^k$, $t \in T$, $k \in \overline{0,5}$, w szczególności $v_0 = \text{const} = 1$. Dowieść, że:

   (a) układ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 jest liniowo niezależny,

   (b) $v_5 \in \langle v_1, \dots, v_4 \rangle$.

3. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni:

$$V := \left\{ v \in \mathbb{K}_3[\,\cdot\,] : v(1) = \dot{v}(0) = -\frac{1}{2}v(0) \right\} \subset \mathbb{K}_3[\,\cdot\,].$$

4. Niech $F \in L(V, W)$, $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ oraz niech $u_1, u_2, \dots, u_s \in V$ będzie bazą $\ker F$. Dowieść, że $\begin{pmatrix} F(v_1), \dots, F(v_r) \\ \text{są liniowo niezależne} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s \\ \text{są liniowo niezależne} \end{pmatrix}$

5. Sprawdzić, że podane zbiory W są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowych V, jeżeli:

   (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x = 3y \right\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = y + z = 0 \right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   (c) $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : \forall_{x \in \mathbb{R}}, p(x) = p(-x)\}$, $V = \mathbb{R}[x]$.

   (d) $W = \left\{ f \in C^1([0,2]) : f'(1) = 0 \right\}$, $V = C^1([0,2])$.

   (e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x, y \\ x + y, 2x \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \mathbb{R}^2{}_2$ (odp. nie jest).

6. Znaleźć bazę rozpinającą poniższe przestrzenie wektorowe:

   (a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x - 2y \\ x + y + 3z \\ y - 4z \\ 2x + z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

   (b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1} \right\}$.

   (c) $V = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) + p'(0) = p'(1) + p''(0) = 0\}$.

7. Znaleźć współrzędne wektora $p = 2x^2 + 3x \in \mathbb{R}_2[x]$ w bazie $\left\{ 2 + x, 3 - x, x^2 + 4 \right\}$.

8. Znaleźć współrzędne podanego wektora we wskazanej bazie:

   (a) $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

9. Wyznaczyć współrzędne wektora w dowolnej bazie rozpinającej podaną podprzestrzeń wektorową:

   (a) $v = 4x^2 - 24x - 3$, $\quad V = \{p \in \mathbb{R}_2[x], p'(3) = 0\}$.

   (b) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = z + 3t \right\}$

10. Podać przykład bazy, w której podany wektor ma zadane współrzędne:

    (a) $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}^?,$

    (b) $p = x^2 - 2x \in \mathbb{R}_2[x], \quad p = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}^?,$

11. Podać macierz przejścia z bazy f do bazy g, jeżeli:

    (a) $V = \mathbb{R}^2, \quad f = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, g = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$

    (b) $V = \mathbb{R}_3[x], \quad f = \{1, x, x^2.x^3\}, \quad g = \{2x^2 - 3, x^3 + x, 4 - x, 1 + x + x^2\}.$

12. Zbadać, czy poniższe przekształcenia są liniowe:

    (a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x - y \\ x \end{bmatrix}.$

    (b) $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x) = |x|$.

    (c) $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $L(p(x)) = xp'(x) + p(1)$.

    (d) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 1 \\ y - 1 \end{bmatrix}.$

13. Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}[x]$ przeprowadza wektor $p_1 = 2x + 3$ na wektor $q_1 = 4x^2 - x - 2$ a wektor $p_2 = 4x - 5$ na wektor $q_2 = 2x^7 + x$. Znaleźć obraz wektora $p = x + 7$ w tym przekształceniu.

14. Dane są dwie podprzestrzenie $\mathbb{R}^2{}_2$: $V_1 = \{X : \begin{bmatrix} 1, & 2 \end{bmatrix} X = 0\}$ i $V_2 = \left\{ X : X \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \right\}$. Znaleźć bazę $V_1 \cap V_2$ i równania opisujące $V_1 + V_2$.

15. Wyznaczyć jądra, obrazy oraz bazy tych podprzestrzeni dla:

    (a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ 3y - 6x \end{bmatrix},$

    (b) $L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x], \quad (Lp)(x) = (x^2 + 2x)p'(-x).$

16. Podać przykłady przekształceń liniowych takich, że:

    (a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \operatorname{Im} L = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} : 2r = 3s = 6t \right\}.$

    (b) $L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \quad \operatorname{Ker} L = \langle x - 1, x^2 - 1 \rangle, \quad \operatorname{Im} L = \langle x^2 \rangle.$

17. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego L we wskazanych bazach:

    $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + y \\ x - 3y \end{bmatrix},$

    $e = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, f = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

18. Macierz przekształcenia liniowego $L : U \to V$ ma w bazie $\{e_1, e_2, e_3\}$ rozpinającej U oraz w bazie $\{f_1, f_2\}$ rozpinającej V postać:

    $A_L = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Znaleźć $L(u_1)$ i $L(u_2)$, jeżeli: $u_1 = 6e_2 - e_3$ a $u_2 = e_1 + 2e_2 - 4e_3$.

19. Znaleźć bazy sumy i części wspólnej przestrzeni $U = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ i $V = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, gdzie:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},\ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},\ b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

20. Znaleźć w bazach kanonicznych macierz odwzorowania T , gdy:
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

21. Które z kolumn $\boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$
należą do przestrzeni $V := \ker \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$? Czy z tych kolumn można wybrać bazę V?

22. Określmy podprzestrzenie $\mathbb{R}^4$ wzorami $V_1 = \langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3\rangle$, $V_2 = \langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_4\rangle$, gdzie $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_4$ są kolumnami macierzy $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$. Znaleźć:

(a) takie bazy V_1 i V_2, że ich wspólne wektory tworzą bazę $V_1 \cap V_2$,

(b) równania opisujące podprzestrzeń $V_1 + V_2$.

23. Niech $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker \boldsymbol{A}$, $V_1 := \operatorname{im} \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$.
(a) Znaleźć takie bazy V_0 i V_1, żeby ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$. (b) Zbadać, czy $\boldsymbol{u} \in V_0 + V_1$.

24. Niech $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 & 8 \\ -3 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker \boldsymbol{A}$, $V_1 := \operatorname{im} \boldsymbol{A}$. Znaleźć: (a) takie bazy podprzestrzeni V_0 i V_1, by ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$; (b) układ równań opisujący podprzestrzeń $V_0 + V_1$ oraz bazę $V_0 + V_1$.

25. Podprzestrzenie $U, V \in \mathbb{R}^4$ zadajmy wzorami $U := \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $V := \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
Znaleźć: (a) takie bazy U i V, że ich wspólne wektory tworzą bazę $U \cap V$; (b) równania opisujące $U + V$.

26. Niech V_0 będzie przestrzenią rozwiązań układu równań danego przez macierz A, zaś V_1 przestrzenią rozpiętą przez kolumny tej macierzy, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -10 & -7 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, czy $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_1 + V_0$. znaleźć takie bazy V_1 i V_0 aby ich część wspólna stanowiła bazę $V_1 \cap V_0$.