Zadania domowe z Algebry I R, seria 3.

26 stycznia 2018

1. Rozważmy następujące warunki na podprzestrzenie V_1, V_2, V_3 przestrzeni V:

   (a) $V = V_1 + V_2 + V_3$,

   (b) $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$,

   (c) $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_3 = V_3 \cap V_1 = \{0\}$,

   (d) każdy wektor $v \in V$ ma dokładnie jeden rozkład $v = v_1 + v_2 + v_3$ na składowe $v_i \in V_i$.

   Zbadać, podając dowód lub kontrprzykład, prawdziwość każdej implikacji: V:

   (a) $\wedge$ (b) $\Rightarrow$ (d), (b) $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d), (a) $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d).

2. Sprawdzić, że dla $n \geqslant 3$ przestrzeń $\mathbb{R}_n[\,\cdot\,]$ jest sumą prostą swoich dwóch podprzestrzeni: $U := \mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$ oraz $V := \{w : w(-1) = w(0) = w(2) = 0\}$. Znaleźć rozkład $w(t) = t^3$ na składowe w U i V.

3. Wyznaczyć zbiory rozwiązań podanych układów równań liniowych niejednorodnych:

   (a) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z - 2t = 1 \\ 2x + y - z + t = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 6x + 2y + 3z = 8 \\ 4x + 2y - z + 3t = 6 \\ 8x + 2y + 7z - 3t = 10 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + 2y - z + s - 2t = 1 \\ 4x + 5y + z + t = 4 \\ 6x + 9y - z + 2s - 3t = 6 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + (1+i)\,y + iz = 3 \\ (1-i)\,y + (2+i)\,z + t = i \\ x + 2y + (2+2i)\,z + t = 3+i \end{cases}$

4. Dowieść, że $\mathbb{R}^4$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V_0 = \ker \boldsymbol{A}$ i $V_1 = \operatorname{im} \boldsymbol{A}$,
   dla $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; rozłożyć na składowe wektor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Sprawdzić, że $\mathbb{R}^4$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni

   $$V_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 3y + z - t = 0 \end{cases} \right\}, \qquad V_1 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

   znaleźć rozkład wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ na składowe w tych podprzestrzeniach.

6. Niech $V := \mathbb{R}^3$. Sprawdzić, że formy liniowe $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in V^*$, dane wzorami: $\phi_k(\vec{x}) := x_1 + x_2 + x_3 - 2kx_k, \quad k = 1, 2, 3$ tworzą bazę V^*

7. Niech $V := \mathbb{R}_3[\cdot]$. Określmy formy liniowe $\phi_0, \ldots, \phi_3 \in V^*$ wzorami:
   $\langle \phi_k, v \rangle := v^{(k)}(-4), \quad k = 0, \ldots, 3.$
   Znaleźć bazę w V, do której baza $\phi_0, \ldots, \phi_3 \in V^*$ jest sprzężona.

8. Niech $V = \mathbb{R}^3$. W przestrzeni sprzężonej dane są trzy formy liniowe:
   $\varphi_1(\mathbf{x}) = -x^1 + x^2 + x^3$, $\varphi_2(\mathbf{x}) = x^1 - x^2 + x^3$, $\varphi_3(\mathbf{x}) = x^1 + x^2 - x^3$. Sprawdzić, że $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ jest bazą V^*. Znaleźć współczynniki rozkładu w tej bazie formy $F^*(\varphi_2)$, jeśli

   $$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^1 + x^2 \\ x^2 + x^3 \\ x^3 + x^1 \end{bmatrix}.$$

9. Dana jest baza e przestrzeni $V := \mathbb{R}^3$, gdzie $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$.

   (a) Znaleźć bazę e^* dualną do e.

   (b) Znaleźć macierze rzutów (w bazie standardowej) na każdy element bazy e wzdłuż podprzestrzeni rozpiętej na dwóch pozostałych elementach bazy e.

   (c) Korzystając z baz e oraz e^*, znaleźć macierz odwzorowania F w bazie e, które w bazie standardowej dane jest macierzą: $[F]^{\mathrm{st}}{}_{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & -2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

10. Niech $V := \mathbb{R}_2[.]$. Dana jest baza e przestrzeni V, gdzie $e_1(x) = x+1$, $e_2(x) = x-1$, $e_3(x) = x^2-1$.

   (a) Sprawdzić, że f, gdzie $f^1(v) = \frac{1}{2}v(1)$, $f^2(v) = -\frac{1}{2}v(-1)$, $f^3(v) = \frac{1}{2}v''(0)$ jest bazą przestrzeni V^* dualną do bazy e.

   (b) Znaleźć rozkład w bazie f następujących elementów V^*: $\alpha(v) = v(0)$, $\beta(v) = v'(0)$, $\gamma(v) = \int_{-1}^{1} v(t)dt$.

11. Niech
$$f := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\2 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 1 & 9\end{pmatrix}, g := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\9 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 8\end{pmatrix},$$
$$h := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$
Przedstawić permutacje $f, f^{-1}, gf, hf, hg, fhf^{-1}, f^{-1}gh, h^{-1}g^{-1}f^{-1}$ jako iloczyny rozłącznych cykli.

12. Znaleźć permutacje $\rho, \sigma \in S_{10}$ takie, że $\sigma \circ \sigma = id$, $\rho \circ \rho = id$, oraz
$$\sigma \circ \rho := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\10 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

13. Wykazać, że $\sigma : \sqrt[20]{1} \to \sqrt[20]{1}$, dane wzorem $\sigma(z) := iz^3$, jest permutacją. Obliczyć jej znak.

14. Funkcja $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ określona jest wzorem: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 6$. Czy $f \in S_3$? Jaki jest jej znak?

15. Sprawdzić, że wzór $\sigma(x) := 3x - 25\,\mathrm{E}\left(\frac{x-1}{8}\right)$ określa permutację zbioru $X = \overline{0,25}$. Znaleźć rozkłady σ oraz σ^4 na cykle rozłączne; obliczyć znak i rząd permutacji σ. ($\mathrm{E}(x)$ oznacza część całkowitą x).

16. Znaleźć znak permutacji σ, rozkład σ na rozłączne cykle oraz obliczyć $\sigma^{24} := \sigma \circ \ldots \circ \sigma$ jeżeli:
$$\sigma := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\5 & 8 & 9 & 1 & 3 & 10 & 4 & 2 & 7 & 11 & 6\end{pmatrix}$$

17. Kwadrat podzielony został na $n \times n$ kwadratowych pól. Jaki znak ma permutacja σ zbioru tych pól odpowiadająca a) obrotowi kwadratu o kąt 90^o; b) odbiciu kwadratu względem jego osi symetrii równoległej do pary boków; c) odbiciu kwadratu względem jednej z jego dwóch przekątnych?

18. Czy cykle: $\gamma = (1\,2\,6\,5)$ i $\delta = (2\,3\,5\,4)$ generują grupę S_6?

19. Obliczyć podane wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\-3 & 2 & -5 & 13\\1 & -2 & 10 & 4\\-2 & 9 & -8 & 25\end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\1 & 3 & -1 & 3\\-1 & -1 & 4 & 3\\-3 & 0 & -8 & -13\end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix}7 & 6 & 9 & 4 & -4\\1 & 0 & -2 & 6 & 6\\7 & 8 & 9 & -1 & -6\\1 & -1 & -2 & 4 & 5\\-7 & 0 & -9 & 2 & -2\end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix}1001 & 1002 & 1003 & 1004\\1002 & 1003 & 1001 & 1002\\1001 & 1001 & 1001 & 999\\1001 & 1000 & 998 & 999\end{vmatrix}$.