EGZAMIN USTNY Z ALGEBRY R II 2017/2018

A. FORMY DWULINIOWE, FORMY KWADRATOWE

A1. DEFINICJA FORMY DWULINIOWEJ. WYMIAR PRZESTRZENI FORM DWULINIOWYCH, DWULINIOWYCH SYMETRYCZNYCH, DWULINIOWYCH ANTYSYMETRYCZNYCH, PRZYKŁADY

A2. MACIERZ FORMY DWULINIOWEJ W BAZIE. ZAMIANA BAZY.

A3. WZAJEMNIE JEDNOZNACZNA ODPOWIEDNIOŚĆ MIĘDZY FORMAMI DWULINIOWYMI SYMETRYCZNYMI, FORMAMI KWADRATOWYMI I ODWZOROWANIAMI SAMO-SPRZĘŻONYMI.

A4. TWIERDZENIE LAGRANGE'A O DIAGONALIZACJI Z DOWODEM.

A5. TWIERDZENIE SYLVESTERA O BEZWŁADNOŚCI FORM Z DOWODEM.

A6. KONSTRUKCJA BAZY DIAGONALIZUJĄCEJ I WYZNACZANIE SYGNATURY METODĄ WYZNACZNIKOWĄ

B. STRUKTURA ENDOMORFIZMU LINIOWEGO

B1. OPERATOR RZUTOWY – DEFINICJA, WŁASNOŚCI. WYKAZAĆ, ŻE JEŚLI $P \in \mathrm{End}(V)$ JEST RZUTEM TO $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$

B2. WYKAZAĆ IMPLIKACJĘ: $(P_1, P_2 \in \mathrm{End}(V),\ P_1 + P_2 = 1\!\!1_V,\ P_1P_2 = P_2P_1 = 0) \Rightarrow (P_1, P_2$ SĄ RZUTAMI ORAZ $\ker P_1 = \operatorname{im} P_2,\ \ker P_2 = \operatorname{im} P_1)$

B3. CO TO JEST RZUTOWY ROZKŁAD JEDNOŚCI?

B4. PODAĆ DEFINICJĘ WARTOŚCI WŁASNEJ I WEKTORA WŁASNEGO. WYKAZAĆ, ŻE WEKTORY WŁASNE DLA RÓŻNYCH WARTOŚCI WŁASNYCH SĄ LINIOWO NIEZALEŻNE (DOPRECYZOWAĆ, UDOWODNIĆ ...)

B5. CO TO JEST PODPRZESTRZEŃ PIERWIASTKOWA? DWA SPOSOBY OPISU.

B6. DEFINICJA i WŁASNOŚCI OPERATORA NILPOTENTNEGO – WIELOMIAN CHARAKTERYSTYCZNY, SPEKTRUM, STOPIEŃ NILPOTENTNOŚCI POSTAĆ KANONICZNA

B7. WYKAZAĆ, ŻE JEŚLI v JEST TAKIE, ŻE $N^k v \neq 0$ i $N^{k+1} v = 0$ to $(v, Nv, \dots, N^k v)$ SĄ LINIOWO NIEZALEŻNE.

B8. TWIERDZENIE JORDANA O POSTACI ENDOMORFIZMU PRZESTRZENI WEKTOROWEJ NAD $\mathbb{C}$

B9. DEFINICJA FUNKCJI OD OPERATORA NA PRZESTRZENI NAD $\mathbb{C}$.

B10. TWIERDZENIE O DZIELENIU FUNKCJI ANALITYCZNEJ PRZEZ WIELOMIAN – – SFORMUŁOWANIE, ZASTOSOWANIE

B11. KOMPLEKSYFIKACJA RZECZYWISTEJ PRZESTRZENI WEKTOROWEJ, KOMPLEKSYFIKACJA OPERATORA, SPEKTRUM.

B12. CO TO JEST WIELOMIAN MINIMALNY i JAK GO ZNALEŹĆ?

B13. PODPRZESTRZENIE NIEZMIENNICZE DLA OPERATORÓW NA PRZESTRZENIACH NAD $\mathbb{R}$.

C. PRZESTRZENIE Z ILOCZYNEM SKALARNYM

C1. ILOCZYN SKALARNY NA ZESPOLONEJ PRZESTRZENI WEKTOROWEJ – DEFINICJA, WŁASNOŚCI

C2. WYKAZAĆ NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA $|\langle v|w\rangle| \leqslant \|v\|\,\|w\|$

C3. WYKAZAĆ NIERÓWNOŚĆ MINKOWSKIEGO $\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$

C5. WYKAZAĆ, ŻE SKOŃCZONY UKŁAD ORTONORMALNY JEST LINIOWO NIEZALEŻNY

C6. WYKAZAĆ NIERÓWNOŚĆ BESSEL'A : JEŚLI $(v_1, \dots, v_n)$ JEST UKŁADEM ORTONORMALNYM i $\alpha_i(v) = \langle v_i | v\rangle$ TO $\|v\|^2 \geqslant \sum_i |\alpha^i(v)|$

C7. OPISAĆ PROCEDURĘ ORTONORMALIZACJI GRAMA - SCHMIDTA

C8. LEMAT RIESZA Z DOWODEM

C9. UDOWODNIĆ, ŻE RZUT JEST ORTOGONALNY WTEDY I TYLKO WTEDY GDY JEST HERMITOWSKI

C10. CO TO JEST HERMITOWSKIE SPRZĘŻENIE OPERATORA. WŁASNOŚCI.

C11. FORMUŁA POLARYZACYJNA DLA FORM $3/2$ - LINIOWYCH

C12. OPERATORY UNITARNE - DEFINICJA, SPEKTRUM, WŁASNOŚCI

C13. TWIERDZENIE O POSTACI OPERATORÓW ORTOGONALNYCH Z DOWODEM.

C14. TWIERDZENIE SPEKTRALNE DLA OPERATORÓW NORMALNYCH NAD $\mathbb{C}$ (Z DOWODEM)

C15. TWIERDZENIE SPEKTRALNE DLA OPERATORÓW HERMITOWSKICH Z DOWODEM.

C16. WYKAZAĆ ŻE JEŚLI $[F, G] = 0$, $F = F^+$, $G = G^+$ TO F I G MAJĄ WSPÓLNĄ ORTONORMALNĄ BAZĘ DIAGONALIZUJĄCĄ

C17. ODPOWIEDNIOŚĆ MIĘDZY FORMAMI KWADRATOWYMI A OPERATORAMI HERMITOWSKIMI NA PRZESTRZENI WEKTOROWEJ NAD $\mathbb{R}$.

D. CZELENDZ

STUDENCI, KTÓRZY CHCIELIBY OTRZYMAĆ OCENĘ CELUJĄCĄ (5!) MUSZĄ, OPRÓCZ DWÓCH PYTAŃ Z GRUP A, B LUB C ZMIERZYĆ SIĘ Z PYTANIEM Z GRUPY D. PONIŻSZE PYTANIA SĄ JEDYNIE PRZYKŁADAMI. OSTATECZNA LISTA JEST NIEJAWNA

D1. UDOWODNIĆ LUB PODAĆ KONTRPRZYKŁAD: „NIE ISTNIEJĄ $A, B \in \mathbb{C}^n{}_n$ TAKIE, ŻE $[A, B] = \mathbb{1}$"

D2. NIECH $Z \in \mathbb{C}^n{}_n$ BĘDZIE TAKIE, ŻE $Z + Z^+$ JEST MACIERZĄ DODATNIĄ. WYKAZAĆ ŻE JEŚLI $\lambda \in Sp(Z)$ TO $Re(\lambda) \geq 0$.

D3. CZY TW. ODWROTNE DO D2 ZACHODZI? TZN JEŚLI $\forall \lambda \in Sp(Z)$ $Re(\lambda) \geq 0$ TO $Z+Z^{+}$ JEST DODATNIE. (DOWÓD LUB KONTRPRZYKŁAD)

D4. $L \in End(\mathbb{R}^3)$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$ $\langle Lv|v\rangle = 0$ WYKAZAĆ, ŻE L NIE MOŻE BYĆ ODWRACALNE. CZY TWIERDZENIE ZACHODZI W $\mathbb{R}^2$

D5. WYKAZAĆ, ŻE JEŚLI $\forall x \in \mathbb{C}^n$ $\langle x|Ax\rangle = 0$ TO $A=0$.