ALGEBRA I R 2017/2018

PYTANIA EGZAMINACYJNE – CZĘŚĆ OGÓLNA

1. SFORMUŁOWAĆ DEFINICJĘ GRUPY. PODAĆ PRZYKŁADY. W GRUPIE S_4 WSKAZAĆ PODGRUPĘ IZOMORFICZNĄ Z GRUPĄ CZWÓRKOWĄ KLEINA V_4.

2. SFORMUŁOWAĆ DEFINICJĘ GRUPY. PODAĆ PRZYKŁADY. SYMBOLEM D_4 OZNACZAMY GRUPĘ SYMETRII KWADRATU. W GRUPIE S_4 WSKAZAĆ PODGRUPĘ IZOMORFICZNĄ Z D_4

3. PODAĆ DEFINICJĘ CIAŁA. PODAĆ PRZYKŁADY CIAŁ, W TYM PRZYNAJMNIEJ JEDEN PRZYKŁAD CIAŁA MAJĄCEGO SKOŃCZONĄ LICZBĘ ELEMENTÓW. CZY ZBIÓR $\mathbb{Z}_4$ (RESZT Z DZIELENIA PRZEZ 4) Z DODAWANIEM I MNOŻENIEM MODULO 4 JEST CIAŁEM?

4. CIAŁO LICZB ZESPOLONYCH – DEFINICJA (W TYM DZIAŁANIA), MODUŁ, SPRZĘŻENIE. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA.

5. PIERWIASTKOWANIE LICZB ZESPOLONYCH – STRUKTURA ZBIORU PIERWIASTKÓW n-TEGO STOPNIA Z 1. OBLICZYĆ I NARYSOWAĆ WSZYSTKIE PIERWIASTKI STOPNIA 3 Z LICZBY -8

6. CO TO JEST WIELOMIAN? TWIERDZENIE O DZIELENIU WIELOMIANÓW Z RESZTĄ WRAZ Z DOWODEM

7. ILE PIERWIASTKÓW MOŻE MIEĆ WIELOMIAN? (STOSOWNE TWIERDZENIE WRAZ Z DOWODEM). CO TO ZNACZY, ŻE CIAŁO JEST ALGEBRAICZNIE DOMKNIĘTE?

8. UDOWODNIĆ, ŻE KAŻDĄ PERMUTACJĘ MOŻNA PRZEDSTAWIĆ W POSTACI ZŁOŻENIA PEWNEJ LICZBY TRANSPOZYCJI. UDOWODNIĆ, ŻE PARZYSTOŚĆ LICZBY TRANSPOZYCJI W ROZKŁADZIE NIE ZALEŻY OD SPOSOBU ROZKŁADU.

9. PODAĆ DEFINICJĘ ORBITY PERMUTACJI I CYKLU. WSKAZAĆ ORBITY PERMUTACJI σ, PRZEDSTAWIĆ JĄ W POSTACI ROZKŁADU NA CYKLE ROZŁĄCZNE, OBLICZYĆ ZNAK:

$$\sigma = (1\,2)(1\,2\,3)(1\,2\,3\,4)(1\,2\,3\,4\,5)(1\,2\,3\,4\,5\,6)$$

10. CZY GRUPA SYMETRII CZWOROŚCIANU FOREMNEGO JEST IZOMORFICZNA S_4? ODPOWIEDŹ UZASADNIĆ, TZN. PODAĆ DOWÓD STOSOWNEGO TWIERDZENIA.

PYTANIA EGZAMINACYJNE – CZĘŚĆ WEKTOROWA

1. PODAĆ DEFINICJĘ I KILKA PRZYKŁADÓW PRZESTRZENI WEKTOROWYCH. PYTANIE DODATKOWE: ROZWAŻAMY PRZESTRZEŃ $V=(\mathbb{Z}_2)^2$ NAD CIAŁEM $\mathbb{Z}_2$. MA ONA 4 ELEMENTY. KTÓREJ ZE ZNANYCH NAM CZTEROELEMENTOWYCH GRUP IZOMORFICZNA JEST $(V,+)$?

2. CO TO ZNACZY, ŻE PODZBIÓR $S\subset V$ JEST LINIOWO NIEZALEŻNY. UDOWODNIĆ STWIERDZENIE: *S jest liniowo zależny wtedy tylko wtedy gdy istnieje $v\in S$, który jest liniową kombinacją elementów S.* ?

3 PODAĆ DEFINICJĘ BAZY PRZESTRZENI WEKTOROWEJ. PODAĆ PRZYKŁADY BAZ W RÓŻNYCH PRZESTRZENIACH. UDOWODNIĆ STWIERDZENIE *Jeżeli B jest bazą V i wektor $x\notin B$ to $B\cup\{x\}$ jest liniowo zależny.*

3. UDOWODNIĆ TWIERDZENIE: *W przestrzeni wektorowej skończonego wymiaru wszystkie bazy mają tyle samo elementów*

4. PODAĆ DEFINICJĘ WYMIARU PRZESTRZENI WEKTOROWEJ. UDOWODNIĆ STWIERDZENIE: *W przestrzeni skończonego wymiaru n każdy zbiór $m>n$ wektorów jest liniowo zależny.*

5. NIECH e, f BĘDĄ BAZAMI W PRZESTRZENI V WYMIARU SKOŃCZONEGO. JAK ZNALEŹĆ WSPÓŁRZĘDNE v W BAZIE f MAJĄC WSPÓŁRZĘDNE v W BAZIE e?

6. PODAĆ DEFINICJĘ PODPRZESTRZENI WEKTOROWEJ. UDOWODNIĆ WZÓR

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2) \quad \text{DLA } V_1,V_2\subset V.$$

7. PODAĆ DEFINICJĘ ODWZOROWANIA LINIOWEGO, JĄDRA I OBRAZU. WYKAZAĆ ŻE *jądro i obraz odwzorowanie liniowego są podprzestrzeniami wektorowymi.*

8. CO TO JEST SUMA PROSTA PRZESTRZENI WEKTOROWYCH? PODAĆ PRZYKŁADY

9. CO TO JEST MACIERZ ODWZOROWANIA LINIOWEGO? ZNALEŹĆ MACIERZ $F:\mathbb{R}_2[\,]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ W BAZACH $(t^2,t,1)$ I $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ DLA ODWZOROWANIA

$$F(v)=\begin{bmatrix}v(1)\\v'(1)\end{bmatrix}$$

10. OPISAĆ PROCEDURĘ ZMIANY BAZY W MACIERZY ODWZOROWANIA LINIOWEGO

11. UDOWODNIĆ WZÓR

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F$$

DLA $F \in L(V,W)$.

12. PODAĆ DEFINICJĘ PRZESTRZENI DUALNEJ DO PRZESTRZENI WEKTOROWEJ. WYKAZAĆ TWIERDZENIE: Dla każdej bazy $e = (e_1, \dots, e_n)$ istnieje baza $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ w przestrzeni dualnej taka, że

$$\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$$

13. NIECH $X \subset V$ BĘDZIE PODPRZESTRZENIĄ W V. CO TO JEST ANIHILATOR X? UDOWODNIĆ, ŻE $\dim X^0 = \dim V - \dim X$

14. NIECH $F \in L(V,W)$. PODAĆ DEFINICJĘ ODWZOROWANIA SPRZĘŻONEGO F^*. PRZEDYSKUTOWAĆ KWESTIĘ ZWIĄZKU MACIERZY F i F^*

15. UDOWODNIĆ ŻE DLA $F \in L(V,W)$ ZACHODZI $\ker F^* = \operatorname{im} F^0$

16. CO TO JEST RZĄD MACIERZY? WYKAZAĆ, ŻE $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$

17. PODAĆ DEFINICJĘ ODWZOROWANIA K-LINIOWEGO. OBLICZYĆ WYMIAR PRZESTRZENI ODWZOROWAŃ k-LINIOWYCH ANTYSYMETRYCZNYCH NA PRZESTRZENI N-WYMIAROWEJ.

18 UDOWODNIĆ TWIERDZENIE: Na przestrzeni $\mathbb{K}^n$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie n-liniowe, antysymetryczne i takie że ma wartość 1 na bazie standardowej.

19. OPISAĆ PROCEDURĘ ZMIANY BAZY W MACIERZY FORMY DWULINIOWEJ.

20. CO TO JEST FORMA KWADRATOWA? WYPROWADZIĆ FORMUŁĘ POLARYZACYJNĄ. ZASTOSOWAĆ JĄ DO FORMY KWADRATOWEJ

$$q : \mathbb{R}_2[\,] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad q(v) = [v'(1)]^2$$

21. SFORMUŁOWAĆ i UDOWODNIĆ TWIERDZENIE LEGENDRE'A O DIAGONALIZACJI FORMY KWADRATOWEJ.