KOLOKWIUM PRZYKŁADOWE

ZADANIE 1 Niech $q(x^1, x^2, x^3) = x^1x^2 - x^2x^3 - x^3x^1$ będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^3$. Znaleźć sygnaturę tej formy i jakąś bazę diagonalizującą.

ZADANIE 2 Zbadać czy istnieją i ewentualnie znaleźć trzy formy liniowe f^1, f^2, f^3 na $\mathbb{R}^3$ takie, że

$$\left(f^1f^2 - (f^3)^2\right)(\bar{x}) = q(\bar{x}) \quad \text{gdzie } q \text{ jest formą kwadratową}$$

z poprzedniego zadania.

ZADANIE 3 $V = \mathbb{R}_3[\cdot]$ $\quad L \in \mathrm{End}(V)$

$$(Lv)(t) = \left(v(1) - v(0)\right) \cdot t + v(0)$$

Znaleźć wielomian charakterystyczny L oraz rozkład V na podprzestrzenie pierwiastkowe względem L.

ZADANIE 4

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć wielomian φ taki że $F^{-1} = \varphi(F)$.
Wykazać że dla dowolnego $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ $\det F \neq 0$ F^{-1} da się wyrazić jako wielomian od F.

ZADANIE 5 Obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$, $n \geq 3$ postaci

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$