

ZADANIA POWTÓRZENIOWE - SEMESTR II - SERIA 1

ZADANIE 1 OBLICZYĆ WYZNACZNIKI NASTĘPUJĄCYCH MACIERZY $n \times n$

(a)

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ a & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ a & a & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a & 1 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 2 W ZALEŻNOŚCI OD x OBLICZYĆ RZĄD MACIERZY A

$$A = \begin{bmatrix} 2x-4 & -3x+6 & 0 & x^2-4 \\ -x+7 & x-9 & x-3 & -x^2+2x+13 \\ x+1 & -2x & x-3 & 2x+4 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 3 NIECH A^D OZNACZA MACIERZ DOPŁNIENI ALGEBRAICZNYCH DLA MACIERZY A . DOWIEŚĆ, ŻE

$$\forall A \in K^n \exists \lambda \in K : (A^D)^D = \lambda A$$

WYZNACZYĆ λ .

ZADANIE 4 DLA JAKICH WARTOŚCI $t \in \mathbb{C}$ KOLUMNY PONIŻSZEJ MACIERZY TWORZĄ BAZĘ PRZESTRZENI \mathbb{C}^3

$$\begin{bmatrix} 3 & t & -6 \\ 1 & 0 & t+6 \\ 4t & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



GABRIEL CRAMER
1704 - 1752
GENEVA

ZADANIE 2

$$A = \begin{bmatrix} 2x-4 & -3x+6 & 0 & x^2-4 \\ -x+7 & x-9 & x-3 & -x^2+2x+13 \\ x+1 & -2x & x-3 & 2x+4 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2x-4 & -3x+6 & 0 \\ -x+7 & x-9 & x-3 \\ x+1 & -2x & x-3 \end{bmatrix} = (x-3) \left[2x(2x-4) + (x+1)(6-3x) + (2x-4)(x-9) - (7-x)(6-3x) \right] =$$

$$= (x-3) \left[\underbrace{(2x-4)(3x-9)}_{3(x-3)} + \underbrace{(6-3x)(2x-6)}_{2(x-3)} \right] = (x-3)^2 [6x-12+12-6x] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -3x+6 & 0 & x^2-4 \\ x-9 & x-3 & -x^2+2x+13 \\ -2x & x-3 & 2x+4 \end{bmatrix} = (x-3) \left[(6-3x)(2x+4) + 2x(x^2-4) - (6-3x)(x^2+2x+13) + (x-9)(x^2-4) \right] =$$

$$(x-3) \left[(x^2-4)(3x-9) + (6-3x)(-x^2-9) \right] = (x-3) \left[3x^3 - 12x - 9x^2 + 36 - 6x^2 + 3x^3 - 54 + 27x \right] =$$

$$(x-3) \left[6x^3 - 15x^2 + 15x - 18 \right] = (x-3) \left[2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 \right] = (x-3)(x-2) \underbrace{(2x^2 - x + 3)}_{\Delta = 1 - 2 \cdot 3 \cdot 4 < 0}$$

Dla $x \notin \{3, 2\}$ $\text{rk} A = 3$ (maksymalny)

dla $x=3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & 10 \\ 4 & -6 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{rk} A = 1$$

dla $x=2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & -1 & 13 \\ 3 & -6 & -1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{rk} A = 2$$