ZADANIA POWTÓRZENIOWE - SEMESTR II - SERIA 3

ZADANIE 1

PRZEDSTAWIĆ MACIERZ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & -4 \\ 3 & 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ JAKO SUMĘ MINIMALNEJ LICZBY MACIERZY RZĘDU 1

ZADANIE 2

UDOWODNIĆ, ŻE JEŚLI $P_1, P_2 \in \mathrm{End}(V)$ SĄ RZUTAMI TO PRAWDZIWA JEST RÓWNOWAŻNOŚĆ

$$P_1 + P_2 \text{ JEST RZUTEM} \iff P_1P_2 = 0 \text{ i } P_2P_1 = 0$$

ZADANIE 3

NIECH $V = \mathbb{R}_n[\,]$ dla $n \geq 3$ SPRAWDZIĆ ŻE OPERATOR $P \in \mathrm{End}(V)$ DANY WZOREM

$$(Pv)(t) = v(5) + (t-5)\,v'(5) + \frac{1}{2}(t-5)^2 v''(5)$$

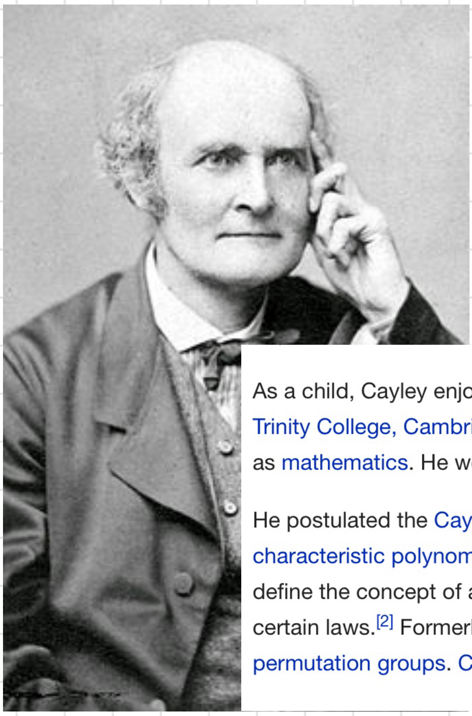
JEST RZUTEM. ZNALEŹĆ $V_0 \subset V$ i $V_1 \subset V$ TAKIE, ŻE P JEST RZUTEM NA V_1 WZDŁUŻ V_2. ZNALEŹĆ RZĄD i ŚLAD P.

ZADANIE 4

OKREŚLMY $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ WZOREM $F(x) = (x^1 + x^3)a + (x^2 + x^4)b$ GDZIE

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ZNALEŹĆ WARTOŚCI WŁASNE i PRZESTRZENIE WŁASNE OPERATORA F. ZNALEŹĆ, JEŚLI ISTNIEJE, BAZĘ WEKTORÓW WŁASNYCH OPERATORA F.



ARTHUR CAYLEY
1863-1895

As a child, Cayley enjoyed solving complex maths problems for amusement. He entered Trinity College, Cambridge, where he excelled in Greek, French, German, and Italian, as well as mathematics. He worked as a lawyer for 14 years.

He postulated the Cayley–Hamilton theorem—that every square matrix is a root of its own characteristic polynomial, and verified it for matrices of order 2 and 3.[1] He was the first to define the concept of a group in the modern way—as a set with a binary operation satisfying certain laws.[2] Formerly, when mathematicians spoke of "groups", they had meant permutation groups. Cayley's theorem is named in honour of Cayley.

WIKIPEDIA

ROZWIĄZANIE ZADANIA 3

NIECH $V = \mathbb{R}_n[\cdot]$ dla $n \geq 3$ SPRAWDZIĆ ŻE OPERATOR $P \in End(V)$ DANY WZOREM

$$(Pv)(t) = v(5) + (t-5)v'(5) + \frac{1}{2}(t-5)^2 v''(5)$$

JEST RZUTEM. ZNALEŹĆ $V_0 \subset V$ i $V_1 \subset V$ TAKIE, ŻE P JEST RZUTEM NA V_1 WZDŁUŻ V_2. ZNALEŹĆ RZĄD i ŚLAD P.

Sprawdzamy czy P jest rzutem:

$$P(Pv)(t) = Pv(5) + (t-5)(Pv)'(5) + \frac{1}{2}(t-5)^2 (Pv)''(5) \quad =*$$

$$Pv(5) = v(5) + (5-5)v'(5) + \frac{1}{2}(5-5)^2 v''(5) = v(5)$$

$$(Pv)'(t) = v'(5) + (t-5)v''(5) = \Big|_{t=5} \; v'(5)$$

$$(Pv)''(t) = v''(5)$$

$$=* \; v(5) + (t-5)v'(5) + \frac{1}{2}(t-5)^2 v''(5) = (Pv)(t) \qquad P^2 = P \Rightarrow P \text{ jest rzutem.}$$

$V_1 = \operatorname{im} P$, $V_0 = \ker P$

Widać, że $\operatorname{im} P \subset \mathbb{R}_2[\cdot]$, dodatkowo biorąc dowolne v możemy uzyskać dowolne wartości $v(5)$, $v'(5)$ i $v''(5)$ zatem $\dim \operatorname{im} P = 3$. skoro $\dim \mathbb{R}_2[\cdot] = 3$ to oczywiście $\operatorname{im} P = \mathbb{R}_2[\cdot] = V_1$. Przy okazji policzyliśmy $rk\, P = \dim \operatorname{im} P = 3$.

$\ker P$ tworzą wielomiany dla których $v(5) = v'(5) = v''(5) = 0$, a więc wielomiany mające $(t-5)^3$ w rozkładzie na czynniki.

$$V_0 = \ker P = \{ w \in \mathbb{R}_n[\cdot] \;:\; w(t) = (t-5)^3 u(t),\; u \in \mathbb{R}_{n-3}[\cdot] \}$$

Skoro P jest rzutem, to w dogodnej bazie jego macierz ma postać

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wymiar bloku z $\mathbb{1}$ jest równy $rk\, P$, zatem $tr\, P = rk\, P = 3$