ZADANIA POWTÓRZENIOWE - SEMESTR II - SERIA 6

ZADANIE 1

NIECH $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ ZBADAĆ DLA JAKICH $x\in\mathbb{R}^3$

(a) GRANICA $\lim\limits_{t\to-\infty}\exp(At)x$ JEST SKOŃCZONA

(b) $\lim\limits_{t\to-\infty}\exp(At)x=0$

(c) GRANICA $\lim\limits_{t\to+\infty}\exp(At)x$ JEST SKOŃCZONA

ZADANIE 2

$F\in\operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$ $F(x)=(x_1+x_3)\bar{a}+(x_2+x_4)\bar{b}$ gdzie $a=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$

Znaleźć wartości własne i przestrzenie własne F oraz obliczyć $\varphi(F)$ dla

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{\lambda-2}-\frac{6}{\lambda-4}+\frac{5}{\lambda-6}$$

ZADANIE 3

$V=\mathbb{K}_2[\cdot]$ $F\in\operatorname{End}V$ $F(v)(t)=v(t+1)-2v'(t)$ Zbadać czy istnieje baza w której F ma macierz

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

Alexandre-Téophile Vandermonde
1735-1796

ROZWIĄZANIE ZAD 1

Zauważmy przede wszystkim, że w tym zadaniu nie trzeba liczyć $\exp(tA)$ w bazie standardowej. Wystarczy znajomość np. bazy Jordana

$w_A(\lambda) = \det(A-\lambda \mathbb{1}) = -\lambda^2(\lambda-3)$ $\quad Sp A = \{0, 3\}$

$\ker(A-3\cdot\mathbb{1}) = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}}_{e_1} \right\rangle$

$\ker(A-0\cdot\mathbb{1}) = \ker A = \left\langle \overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}}^{e_2} \right\rangle$

$\ker A^2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}}_{e_3} \right\rangle$ $\quad A\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

$Ae_1 = 3e_1 \implies \exp(tA)e_1 = e^{3t}e_1$ $\quad Ae_2 = 0 \implies \exp(tA)e_2 = e_2$

$Ae_3 = e_2 \implies \exp(tA)e_3 = e_3 + te_2$

(e_1, e_2, e_3) to baza, zatem dowolny wektor jest postaci

$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

$\exp(At)v = \alpha_1 e^{3t} e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3(e_3 + te_2)$

Rozpatrujemy granicę w $t \to -\infty$ czynnik e^{3t} znika w granicy. Jeśli więc granica ma być skończona współczynnik α_3 musi zniknąć, zaś na α_1 i α_2 nie ma warunku. (a) $v \in \langle e_1, e_2 \rangle$

Jeśli granica $t \to -\infty$ ma być 0 to dodatkowo $\alpha_2 = 0$ zatem

(b) $v \in \langle e_1 \rangle$

W granicy $t \mapsto +\infty$ krzywa $t \mapsto \exp(At)v$ „ucieka" do nieskończoności gdy $\alpha_1 \neq 0$ lub $\alpha_3 \neq 0$ zatem

(c) $v \in \langle e_2 \rangle$