Kolokwium z Algebry II R

7 maja 2018

Zadanie 1. Obliczyć $\exp(t\,A)$, dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Niech Q_1 będzie formą kwadratową określoną na $\mathbb{R}^2{}_2$ wzorem

$$Q_1(X) = \mathrm{tr}(X^T G X H), \text{ gdzie } X \in \mathbb{R}^2{}_2, \ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć jakąś bazę $\mathbb{R}^2{}_2$, w której macierz formy Q_1 jest diagonalna. Jaka jest sygnatura formy Q_1? Rozważmy także formę kwadrtową Q_2 na $\mathbb{R}^4$ daną wzorem

$$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + 4 x_2 x_3 + 3 x_3 x_4.$$

Czy istnieje odwzorowanie liniowe $\chi \ : \ \mathbb{R}^2{}_2 \to \mathbb{R}^4$ o własności $Q_2 \circ \chi = Q_1$? Odpowiedź proszę uzasadnić.

Zadanie 3. Odwzorowanie $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ w bazie standardowej jest dane macierzą

$$[T]^{st}{}_{st} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć rozkład $\mathbb{R}^3$ na podprzestrzenie niezmiennicze operatora T i związane z tym rozkładem operatory rzutowe.

Zadanie 4. Niechaj $A \in \mathbb{K}^n{}_n$ będzie macierzą spełniającą warunek

$$A^3 = 2\mathbb{I}_n.$$

Wykazać, że macierz

$$B := A^2 - 2A + 2\mathbb{I}_n$$

jest odwracalna.

Powodzenia!

Szymon Charzyński
Katarzyna Grabowska
Rafał R. Suszek

ROZWIĄZANIA ZADAŃ Z KOLOKWIUM

ZADANIE 1. Analizujemy macierz A:

$$w_A(\lambda) = \det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda)\lambda + 1 + 1 - (2-\lambda) - \lambda + (1-\lambda) =$$

$$- (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda) + \cancel{2} - \cancel{2} + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} + 1 - \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3 \qquad \mathrm{Sp}\,A = \{1\}$$

$$\ker(A-\mathbb{1}) = \ker\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Przestrzeń własna jest jednowymiarowa, zatem w postaci Jordana operator ma macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rozwiązujemy na dwa (trzy) sposoby:

(1)
$$\begin{array}{llll}
r(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c & r(1) = a+b+c & f(\lambda) = \exp(t\lambda) & f(1) = e^t \\
r'(\lambda) = 2a\lambda + b & r'(1) = 2a + b & f'(\lambda) = t\exp(t\lambda) & f'(1) = te^t \\
r''(\lambda) = 2a & r''(1) = 2a & f''(\lambda) = t^2\exp(t\lambda) & f''(1) = t^2e^t
\end{array}$$

$$\begin{cases} a+b+c = e^t \\ 2a+b = te^t \quad \rightarrow \quad b = te^t - t^2e^t \\ 2a = t^2e^t \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}t^2e^t \end{cases}$$

$$c = e^t - te^t + t^2e^t - \frac{1}{2}t^2e^t =$$
$$= e^t - te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

$$r(\lambda) = \left[\frac{1}{2}t^2\lambda^2 + (t-t^2)\lambda + \left(1 - t + \frac{1}{2}t^2\right)\right]e^t =$$

$$= e^t\left[t^2\left(\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}\right) + t(\lambda - 1) + 1\right]$$

$$\exp(tA) = r(A) = e^t\left[t^2\underbrace{\left(\frac{1}{2}A^2 - A + \frac{1}{2}\mathbb{1}\right)}_{\frac{1}{2}(A-\mathbb{1})^2} + t(A-\mathbb{1}) + \mathbb{1}\right] =$$

$$(A-\mathbb{1})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\exp(tA) = e^t\left\{t^2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= e^t\begin{bmatrix} 1 & t & t \\ -t & -\frac{1}{2}t^2 + t + 1 & -\frac{1}{2}t^2 + t \\ t & \frac{1}{2}t^2 - t & \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \end{bmatrix}$$

(2) Wyznaczamy bazę Jordana: wektor własny $v_0 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

Wektory pierwiastkowe:

$$\ker(A-\mathbb{1})^2 = \ker\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix} = \left\langle \underset{}{\overset{\parallel\, v_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

$(A-\mathbb{1})v_1 = v_0$ Dobieramy trzeci wektor v_2 tak, żeby $(A-\mathbb{1})v_2 = v_1$

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ ok} \quad v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{Baza Jordana} \quad J = (v_0, v_1, v_2)$$

$$\exp(tA)v_0 = e^t v_0 = e^t\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\exp(tA)v_1 = \exp(tA - t\mathbb{1} + t\mathbb{1})v_1 = e^t\left(\mathbb{1} + (A-\mathbb{1})t + \tfrac{1}{2}(A-\mathbb{1})^2t^2\right)v_1 = e^t\left(v_1 + t v_0\right) = e^t\begin{bmatrix}1\\-t\\t\end{bmatrix}$$

$$\exp(tA)v_2 = e^t\left(\mathbb{1} + t(A-\mathbb{1}) + \tfrac{1}{2}t^2(A-\mathbb{1})^2\right)v_2 = e^t\left(v_2 + t v_1 + \tfrac{1}{2}t^2 v_0\right) = e^t\begin{bmatrix}1+t\\1-\frac{1}{2}t^2\\\frac{1}{2}t^2\end{bmatrix}$$

$$\left[\exp(tA)\right]^{st}_J = e^t\begin{bmatrix}0&1&1+t\\-1&-t&1-\frac{1}{2}t^2\\1&t&\frac{1}{2}t^2\end{bmatrix} \qquad [id]^J_{st} = \begin{bmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\exp(tA) = e^t\begin{bmatrix}0&1&1+t\\-1&-t&1-\frac{1}{2}t^2\\1&t&\frac{1}{2}t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix} =$$

$$= e^t\begin{bmatrix}1&t&t\\-t&t+1-\frac{1}{2}t^2&t-\frac{1}{2}t^2\\t&-t+\frac{1}{2}t^2&1-t+\frac{1}{2}t^2\end{bmatrix}$$

(3) Powyższe sposoby są standardowe. W tym konkretnym przypadku można też zauważyć, że skoro mamy jedną wartość własną to rozkład $A = D+N$ jest po prostu postaci $D = \mathbb{1}$ $N = A-\mathbb{1}$, zatem postać $r(\lambda)$ wynika wprost z rozwiązania w niej

$$\exp(tA) = \exp(tA - t\mathbb{1} + t\mathbb{1}) = \exp(t\mathbb{1})\exp(t(A-\mathbb{1})) = e^t\left(\mathbb{1} + t(A-\mathbb{1}) + t^2(A-\mathbb{1})^2\right).$$

ZADANIE 2

$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & a-c \\ b+d & b-d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+c)b+(a-c)d & \cdots \\ \cdots & (b+d)a+(b-d)c \end{bmatrix}$$

ślad: $ab + cb + ad - cd + ab + da + bc - dc$

$$= 2(ab + cb + ad - cd) = 2\big((a+c)b + (a-c)d\big) = 2\left(\frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2) + \frac{1}{4}(\gamma^2 - \delta^2)\right) =$$

$\alpha = a + c + b$ $\quad \alpha - \beta = 2b$

$\beta = a + c - b$ $\quad \alpha + \beta = 2(a+c)$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)$$

sygnatura $(2,2)$

$\gamma = a - c + d$ $\quad \gamma + \delta = 2(a-c)$

$\delta = a - c - d$ $\quad \gamma - \delta = 2d$

wsp. diag:

$\alpha = a + c + b$

$\beta = a + c - b$

$\gamma = a - c + d$

$\delta = a - c - d$

$\alpha - \beta = 2b$

$\alpha + \beta = 2a + 2c$

$\gamma - \delta = 2d$

$\gamma + \delta = 2(a-c)$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4a$

$\alpha + \beta - \gamma - \delta = 4c$

$a = \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

$b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$c = \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma - \delta)$

$d = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) & \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ \frac{1}{2}(\gamma - \delta) & \frac{1}{4}(\alpha + \beta - \gamma - \delta) \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1/4 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

baza diagonalizująca

$$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + 4x_2 x_3 + 3x_3 x_4$$

$x_1 = a + b \qquad x_2 = a - b$

$$Q(a, b, x_3, x_4) = a^2 - b^2 + 4ax_3 - 4bx_3 + 3x_3x_4 =$$

$$= (a + 2x_3)^2 - 4x_3^2 - b^2 - 4bx_3 + 3x_3x_4 =$$

$$= (a + 2x_3^2) - (b + 2x_3)^2 + 4x_3 - 4x_3 + 3x_3x_4 = (a + 2x_3)^2 - (b + 2x_3)^2 + x_3x_4$$

Q_2 ma sygnaturę $(2,2)$ podobnie jak Q_1, zatem X istnieje

X można skonstruować następująco: w $\mathbb{R}^4$ wybieramy bazę (v_1, v_2, v_3, v_4) w której Q_2 ma macierz $\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$, podobnie w $\mathbb{R}^2_2$ bierzemy bazę (X_1, X_2, X_3, X_4) w której Q_1 ma taką samą macierz. Definiujemy

$$X(X_i) = v_i.$$

ZADANIE 3

$$w_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 3 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(3-\lambda)(1-\lambda) + 2 + 12 - 6\lambda + 2(1-\lambda) - 2(3-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda + 14 - 6\lambda - \cancel{2\lambda} + 2 - 6 + \cancel{2\lambda}$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda + 10 = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = -(\lambda-2)(\lambda - (1+2i))(\lambda - (1-2i))$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 4 & -9 & 10 \\ \hline 2 & -1 & 2 & -5 & = \end{array}$$

$\Delta = 4 - 4\cdot 5 = -16$

$\sqrt{\Delta} = \pm 4i$

$\lambda = \frac{1}{2}(2 \pm 4i)$ $\qquad Sp(T) = \{2, 1+2i, 1-2i\}$

$\lambda - 2$ i $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ są względnie pierwsze szukamy $w(\lambda)$ i $v(\lambda)$ takich że

$$(\lambda-2)v(\lambda) - (\lambda^2 - 2\lambda + 5)w(\lambda) = 1$$

$$\begin{array}{cccc} \lambda^2 - 2\lambda + 5 & \lambda - 2 & 5 & 0 \\ & \lambda & \frac{1}{5}\lambda - \frac{2}{5} & \end{array}$$

$$\underbrace{\lambda \qquad 1}_{5} \qquad \underbrace{0 \qquad 1}_{5}$$

$$\frac{1}{5}(\lambda^2 - 2\lambda + 5) + \left(-\frac{1}{5}\lambda\right)(\lambda - 2) = 1$$

$$P_1 = \frac{1}{5}(T^2 - 2T + 5)$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$5P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \mathbb{1} - P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ $\quad V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ Przestrzeń niezmiennicza odpowiadająca zespolonym wartościom własnym

przestrzeń własna dla wartości własnej 2

ZADANIE 4

$A^3 = 2 \cdot \mathbb{1}$

Macierz B wyraża się jako wielomian od macierzy A.

$B = A^2 - 2A + 2\mathbb{1}$.

$B = \varphi(A) \quad \varphi(t) = t^2 - 2t + 2$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \quad \sqrt{\Delta} = \pm 2i$

pierwiastki

$1 \pm i$

Funkcja $t \xmapsto{f} \frac{1}{t^2 - 2t + 2}$ jest więc analityczna wewnątrz koła o środku w 0 i promieniu $\sqrt{2}$

Wiadomo także, że dla $w(t) = t^3 - 2$ zachodzi $w(A) = 0$ i pierwiastki wielomianu w leżą w obszarze analityczności f. Można więc użyć twierdzenia o dzieleniu funkcji analitycznej przez wielomian. Istnieją σ i r takie, że

$f = \sigma \cdot w + r$ przy czym r jest wielomianem co najwyżej kwadratowym. Wielomian r można wyznaczyć z warunków

$r(\lambda) = f(\lambda)$ dla $\lambda \in \sqrt[3]{2}\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ gdzie ε_i są pierwiastkami trzeciego stopnia z jedynki. $\quad B^{-1} = f(A) = r(A)$ $\blacksquare$