$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \\ -x+y-2z=-5 \end{cases}$$

3 równania
3 niewiadome
1 rozwiązanie

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+3y+2z=2 \\ 3x-4y-5z=7 \end{cases}$$

brak rozwiązań

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+3y+2z=2 \\ 3x-4y-5z=-3 \end{cases}$$

mnóstwo rozwiązań

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+2x_3-x_4=4 \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=-2 \\ 2x_1-2x_3+x_4=1 \end{cases}$$

4 równania
4 niewiadome
? rozwiązań!

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=2 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

3 równania
2 niewiadome
1 rozwiązanie

ALGEBRA LINIOWA

Rozwiązujemy układy równań postaci:

$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3 + \dots + a^1_n x^n = b^1 \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3 + \dots + a^2_n x^n = b^2 \\ \vdots \\ a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + a^m_3 x^3 + \dots + a^m_n x^n = b^m \end{cases}$$

$$a^2_3$$

numer równania (wiersz)

numer niewiadomej (kolumna)

$$a^2_3 \, x^3$$

te zawsze takie same

Jeszcze o notacji:

$$a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3 + \dots + a^2_n x^n = \sum_{k=1}^{n} a^2_k x^k = a^2_k x^k$$

KONWENCJA SUMACYJNA

SUMUJEMY PO POWTARZAJĄCYCH SIĘ INDEKSACH NA GÓRZE i NA DOLE!

CAŁY UKŁAD ZAPISANY W SKRÓCIE:

$$a^i_k x^k = b^i \qquad i = 1 \dots m, \quad k = 1 \dots n$$

PYTANIA:

1. Dlaczego niektóre układy równań mają jedno rozwiązanie a inne mnóstwo albo wcale?

2. Ile w ogóle może być rozwiązań układu równań liniowych, na przykład, czy istnieją układy mające dokładnie dwa różne rozwiązania?

3. Czy jest związek między liczbą równań, liczbą niewiadomych i liczbą rozwiązań?

Potrzebujemy TEORII!!! TO ZNACZY MUSIMY ZROZUMIEĆ CO SIĘ DZIEJE i SFORMUŁOWAĆ OGÓLNE ZASADY

SPRÓBUJMY ROZWIĄZAĆ NASZ UKŁAD RÓWNAŃ:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^3 = 2 \\ x^1 + 3x^2 + 2x^3 - x^4 = 4 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 + 3x^4 = -2 \\ 2x^1 - 2x^3 + x^4 = 1 \end{cases}$$

$$x^1 = 2 - 2x^2 - x^3$$

$$2 - 2x^2 - x^3 + 3x^2 + 2x^3 - x_4 = 4$$

$$x^2 + x^3 - x^4 = 2$$

$$x^2 = 2 - x^3 + x^4$$

$$x^1 = 2 - 2(2 - x^3 + x^4) - x^3 =$$

$$= -2 + x^3 - 2x^4$$

$$2(-2 + x^3 - 2x^4) + 2 - x^3 + x^4 - x^3 + 3x^4 = -2$$

$$-4 + 2x^3 - 4x^4 + 2 - x^3 + x^4 - x^3 + 3x^4 = -2$$

$$x^3 \underbrace{(2 - 1 - 1)}_{0} + x^4 \underbrace{(-4 + 1 + 3)}_{0} + \underbrace{(-4 + 2)}_{-2} = -2$$

Równanie spełnione tożsamościowo, nie wnosi żadnej nowej informacji

$$2x^1 - 2x^3 + x^4 = 1$$

$$2(-2 + x^3 - 2x^4) - 2x^3 + x^4 = 1$$

$$-4 + 2x^3 - 4x^4 - 2x^3 + x^4 = 1$$

$$-3x^4 = 5 \qquad x^4 = -5/3$$

Podstawić do równań na x^1 i x^2

wygląda na to, że x^3 dowolne

... MNÓSTWO RACHUNKÓW

ZAPIS UKŁADU RÓWNAŃ WYGODNY DO OBRÓBKI :

$$\left.\begin{array}{l} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3 + \cdots + a^1_n x^n = b^1 \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3 + \cdots + a^2_n x^n = b^2 \\ \vdots \\ a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + a^m_3 x^3 + \cdots + a^m_n x^n = b^m \end{array}\right. \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n & b^1 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n & b^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & a^m_3 & \cdots & a^m_n & b^m \end{array}\right]$$

ROZWIĄZYWANIE $\longrightarrow$ ZASTĘPOWANIE UKŁADU RÓWNAŃ PRZEZ RÓWNOWAŻNY, PROSTSZY

DWA UKŁADY RÓWNAŃ SĄ RÓWNOWAŻNE JEŚLI MAJĄ TEN SAM ZBIÓR ROZWIĄZAŃ

???
WYJAŚNI SIĘ DALEJ

PYTANIE PRAKTYCZNE: CO WOLNO ROBIĆ Z UKŁADEM RÓWNAŃ TAK, ŻEBY NIE ZMIENIĆ ZBIORU ROZWIĄZAŃ?

OPERACJE ELEMENTARNE $\longrightarrow$
- WOLNO MNOŻYĆ RÓWNANIE PRZEZ LICZBĘ RÓŻNĄ OD ZERA
- WOLNO DODAWAĆ DWA RÓWNANIA

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & a^m_3 & \cdots & a^m_n \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{matrix}}_{b}\right] \rightsquigarrow [A|b]$$

JESZCZE JEDEN SPOSÓB ZAPISU, KTÓRY NALEŻY ZNAĆ I ROZUMIEĆ: MNOŻENIE MACIERZY:

(m wierszy, n kolumn)

(n wierszy, 1 kolumna)

(m wierszy jedna kolumna)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & a^m_3 & \cdots & a^m_n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix}}_{b} \qquad A \cdot x = b$$

$$(m \times n)\ (n \times 1) \rightsquigarrow (m \times 1)$$

musi się zgadzać

WRACAMY DO ROZWIĄZYWANIA: (1) MNOŻENIE RÓWNANIA PRZEZ LICZBĘ, (2) DODAWANIE RÓWNAŃ, (3) PRZESTAWIANIE KOLEJNOŚCI RÓWNAŃ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\boxed{3}+3\cdot\boxed{2} \\ \boxed{4}+\boxed{2} \\ \boxed{2}\ \text{b.z.}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 10 & 5 & 0 & 10 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot\boxed{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{1}-\boxed{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^3 = 2 \\ x^1 + 3x^2 + 2x^3 - x^4 = 4 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 + 3x^4 = -2 \\ 2x^1 - 2x^3 + x^4 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\boxed{2}-2\boxed{3},\ \frac{1}{3}\cdot\boxed{4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\boxed{2}-\boxed{4},\ \boxed{3}-2\cdot\boxed{4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5/3 \end{array}\right]$$

$$x^4 = -5/3$$

$$-x^1 + x^3 = -4/3 \longrightarrow x^3 = x^1 - 4/3$$

$$+x^1 + x^2 = 5/3 \longrightarrow x^2 = 5/3 - x^1$$

KOLUMNOWY SAMOTNIK: JEDYNY NIEZEROWY WYRAZ W KOLUMNIE

POSTAĆ WIERSZOWO ZREDUKOWANA: W KAŻDYM NIEZEROWYM WIERSZU JEST KOLUMNOWY SAMOTNIK.

KAŻDE RÓWNANIE MOŻNA DOPROWADZIĆ DO POSTACI WIERSZOWO ZREDUKOWANEJ ZA POMOCĄ OPERACJI ①, ②

Zagadnienie istnienia i liczby rozwiązań dyskutujemy jedynie dla równań w postaci zredukowanej:

1. Rozwiązanie istnieje zawsze, jeśli tylko w postaci zredukowanej nie ma równań typu: $[0\ 0\ 0 \cdots 0 \mid b]$ $b \neq 0$. Jeśli są – układ jest sprzeczny. Dalej zajmujemy się niesprzecznymi.

2. Niech n - liczba zmiennych, k - liczba samotników (równa liczbie niezerowych równań). Zawsze $n \geqslant k$.

3. Jeśli $n = k$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, jeśli $n > k$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Żeby lepiej przyjrzeć się zbiorowi rozwiązań przenumerujmy niewiadome tak, żeby indeksy $1 \dots k$ odpowiadały tym zmiennym przy których są samotniki, dodatkowo w wygodnej kolejności. Na przykład w naszym układzie równań ....>

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5/3 \end{array}\right]$$

$$x^4 = -5/3$$

$$-x^1 + x^3 = -4/3 \longrightarrow x^3 = x^1 - 4/3$$

$$+x^1 + x^2 = 5/3 \longrightarrow x^2 = 5/$$

$$\left.\begin{array}{l} x^4 = y^1 \\ x^3 = y^2 \\ x^2 = y^3 \\ x^1 = y^4 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} y^1 = -5/3 \\ -y^4 + y^2 = -\frac{4}{3} \\ y^4 + y^3 = 5/3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5/3 \end{array}\right]$$

Ogólnie układ równań po zredukowaniu i uporządkowaniu wygląda tak:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c^1_{k+1} & c^1_{k+2} & \cdots & c^1_n & d^1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c^2_{k+1} & c^2_{k+2} & \cdots & c^2_n & d^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c^k_{k+1} & c^k_{k+2} & \cdots & c^k_n & d^k \end{array}\right]$$

Rozwiązanie:

$$y^1 = d^1 - \sum_{i=k+1}^{n} c^1_i y^i$$

$$\vdots$$

$$y^k = d^k - \sum_{i=k+1}^{n} c^k_i y^i$$

$y^{k+1}, \ldots, y^n$ dowolne

Jeśli tylko $m>k$ rozwiązań jest nieskończenie wiele. Liczba dowolnych parametrów to $m-k$

Nazwijmy układy równań z $b=0$ jednorodne a te z $b\neq 0$ niejednorodne. Operacje elementarne zachowują jednorodność / niejednorodność układu.

Rozwiązanie:

$$y^1 = d^1 - \sum_{i=k+1}^{n} c^1_i y^i \qquad y^{k+1}, \dots, y^n \text{ dowolne}$$
$$\vdots$$
$$y^k = d^k - \sum_{i=k+1}^{n} c^k_i y^i$$

Zapiszmy w innej postaci (w kolumnie):

$$\begin{bmatrix} y^1\\ y^2\\ \vdots\\ y^k\\ y^{k+1}\\ \vdots\\ y^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1-\sum_{i=k+1}^{n} c^1_i y^i \\ d^2 - \sum_{i=k+1}^{n} c^2_i y^i\\ \vdots \\ d^k - \sum_{i=k+1}^{n} c^k_i y^i \\ y^{k+1}\\ \vdots\\ y^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1\\ d^2\\ \vdots\\ d^k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} - y^{k+1}\begin{bmatrix} c^1_{k+1}\\ c^2_{k+1}\\ \vdots\\ c^k_{k+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} - y^{k+2}\begin{bmatrix} c^1_{k+2}\\ c^2_{k+2}\\ \vdots\\ c^k_{k+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} - \cdots - y^{n}\begin{bmatrix} c^1_{n}\\ c^2_{n}\\ \vdots\\ c^k_{n}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \bar{d} - y^{k+1}\,\bar{c}_{k+1} - y^{k+2}\,\bar{c}_{k+2} - \cdots - y^{n}\,\bar{c}_{n}$$

$$y^1 = d^1 - \sum_{i=k+1}^{n} c^1_i y^i$$

$$\vdots$$

$$y^k = d^k - \sum_{i=k+1}^{n} c^k_i y^i$$

$$\bar y = \bar d - y^{k+1}\,\bar c_{k+1} - \cdots\, y^{n}\,\bar c_n$$

$\bar d = 0$ układ jednorodny. Zbiór rozwiązań ma ciekawe własności:

(1) suma dwóch dowolnych rozwiązań jest rozwiązaniem

(2) iloczyn rozwiązania przez liczbę jest rozwiązaniem

$$\bar y = \lambda^{k+1}\,\bar c_{k+1} + \cdots + \lambda^{n}\,\bar c_n$$

$$+\ \bar y' = \mu^{k+1}\,\bar c_{k+1} + \cdots + \mu^{n}\,\bar c_n$$

$$\bar y + \bar y' = (\lambda^{k+1} + \mu^{k+1})\,\bar c_{k+1} + \cdots\ (\lambda^{n} + \mu^{n})\,\bar c_n$$

$$\bar y = \lambda^{k+1}\,\bar c_{k+1} + \cdots + \lambda^{n}\,\bar c_n \quad / \cdot r$$

$$r\bar y = (r\lambda^{k+1})\,\bar c_{k+1} + \cdots + (r\lambda^{n})\,\bar c_n$$

$$\begin{bmatrix} r\cdot y^1 \\ r y^2 \\ \vdots \\ r y^n \end{bmatrix}$$

NASZ UKŁAD RÓWNAŃ:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{array}\right]$$

wersja jednorodna:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x^4 &= 0 \\ -x^1 + x^3 &= 0 \\ x^1 + x^2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^4 &= 0 \\ x^3 &= x^1 \\ x^2 &= -x^1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ -x^1 \\ x^1 \\ 0 \end{bmatrix} = x^1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \bar{c}$$

Rozwiązaniem układu jednorodnego jest dowolna wielokrotność

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} 7 \cdot \bar{c}$$

$$\begin{bmatrix} \pi \\ -\pi \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \pi \cdot \bar{c}$$

$$\begin{bmatrix} 1/5 \\ -1/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 1/5 \cdot \bar{c}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \bar{c} + \frac{2}{3} \cdot \bar{c} = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)\bar{c}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{12} \\ -\frac{11}{12} \\ \frac{11}{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \bar{d} - y^{k+1}\,\bar{c}_{k+1} - \dots\, y^n\,\bar{c}_n$$

$\bar{d} \neq 0$ układ niejednorodny   zbiór rozwiązań też ma ciekawe własności

każde rozwiązanie jest sumą $\bar{d}$ i pewnego rozwiązania odpowiedniego układu jednorodnego

$$\bar{y} = \bar{d} + \underbrace{\lambda^{k+1}\bar{c}_{k+1} + \dots + \lambda^n\,\bar{c}_n}_{\text{rozwiązanie układu jednorodnego}}$$

albo

rozwiązanie ogólne (RORN) jest sumą wybranego rozwiązania układu niejednorodnego (RSRN) i ogólnego rozwiązania układu jednorodnego (RORJ)

RORN = RSRN + RORJ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -5/3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5/3 \end{array}\right]$$

$x^4 = -5/3$

$-x^1 + x^3 = -4/3$

$x^1 + x^2 = 5/3$

$x^3 = -\frac{4}{3} + x^1$

$x^2 = \frac{5}{3} - x^1$

$x^4 = -\frac{5}{3}$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ 5/3 - x^1 \\ -4/3 + x^1 \\ -5/3 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x^4 &= -\tfrac{5}{3} \\ -x^1 + x^3 &= -\tfrac{4}{3} \\ x^1 + x^2 &= \tfrac{5}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^3 &= -\tfrac{4}{3} + x^1 \\ x^2 &= \tfrac{5}{3} - x^1 \\ x^4 &= -\tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \frac{5}{3} - x^1 \\ -\frac{4}{3} + x^1 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + x^1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \left(-\frac{4}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\left(x^1 + \frac{4}{3}\right)}_{\lambda} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

RSRN

RORJ

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

RORJ

RSRN (inne)