WSPÓŁRZĘDNE WEKTORA W BAZIE

V - przestrzeń wektorowa, $\dim V = n$ $\quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ - baza w V

FAKT: Każdy wektor $v \in V$ ma jednoznaczny rozkład w bazie f, tzn. istnieją jednoznacznie wyznaczone $\varphi^1, \dots, \varphi^n \in \mathbb{K}$: $\quad v = \varphi^1 f_1 + \varphi^2 f_2 + \dots + \varphi^n f_n$.

DOWÓD: Ustalmy dowolny wektor $v \in V$. Liczby $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ takie, że $v = \varphi^1 f_1 + \dots + \varphi^n f_n$ istnieją, ponieważ $f_1, \dots, f_n$ rozpinają całą przestrzeń. Załóżmy teraz (ad absurdum), że istnieją $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{K}$ takie, że $v = \lambda^1 f_1 + \dots + \lambda^n f_n$ i istnieje $k \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $\lambda^k \neq \varphi^k$. Zapiszmy

$$0 = v - v = \varphi^1 f_1 + \varphi^2 f_2 + \dots + \varphi^n f_n - (\lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2 + \dots + \lambda^n f_n) = \boxed{(\varphi^1 - \lambda^1) f_1 + (\varphi^2 - \lambda^2) f_2 + \dots + (\varphi^n - \lambda^n) f_n}$$

Ostatnie wyrażenie (zaznaczone na żółto) jest kombinacją liniową liniowo niezależnych wektorów. Jeśli kombinacja ta ma znikać, to jedynie dla $\varphi^1 = \lambda^1$, $\varphi^2 = \lambda^2$, $\dots$ $\varphi^n = \lambda^n$. Założenie o istnieniu k takiego że $\lambda^k \neq \varphi^k$ stoi w sprzeczności z powyższym wnioskiem $\square$

Liczby $\varphi^1 \dots \varphi^n$ nazywamy **współrzędnymi wektora v w bazie f**. Ponieważ liczby te są jednoznacznie wyznaczone dla każdego v, można je potraktować jak funkcje określone na V o wartościach w ciele $\mathbb{K}$.

$$\varphi^i : V \longrightarrow \mathbb{K} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

OZNACZENIA: Mając bazę $f=(f_1,\dots f_n)$ i odpowiadające jej współrzędne φ^i zapisujemy:

$$[v]^f = \begin{bmatrix} \varphi^1(v) \\ \varphi^2(v) \\ \vdots \\ \varphi^n(v) \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD: $V=\mathbb{R}_2[\cdot]$ $\dim V=3$ $f=(f_1,f_2,f_3)$

$f_1(t)=t^2-1$

$f_2(t)=t-1$

$f_3(t)=t+1$

Zadanie: znaleźć współrzędne wielomianu $v(t)=2t^2+3t+4$ w bazie f.

$$v=\varphi^1 f_1+\varphi^2 f_2+\varphi^3 f_3$$

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad v(t)=\varphi^1 f_1(t)+\varphi^2 f_2(t)+\varphi^3 f_3(t)$$

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad 2t^2+3t+4=\varphi^1(t^2-1)+\varphi^2(t-1)+\varphi^3(t+1)$$

$$2t^2+3t+4=\varphi^1 t^2+(\varphi^2+\varphi^3)t+(-\varphi^1-\varphi^2+\varphi^3)$$

$$\begin{cases} \varphi^1=2 \\ \varphi^2+\varphi^3=3 \\ -\varphi^1-\varphi^2+\varphi^3=4 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} \varphi^2+\varphi^3=3 \\ -\varphi^2+\varphi^3=6 \\ \hline \varphi^3=9/2 \quad \varphi^2=-3/2 \end{array}$$

$$[v]^f=\begin{bmatrix} 2 \\ -3/2 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

WŁASNOŚCI WSPÓŁRZĘDNYCH (jako funkcji na V)

Niech v i w będą wektorami z V i niech $\lambda \in \mathbb{K}$. Szukamy współrzędnych wektora $v+w$ oraz wektora λv

$$
\begin{aligned}
v &= \varphi^1(v)f_1 + \dots + \varphi^n(v)f_n \\
+\quad w &= \varphi^1(w)f_1 + \dots + \varphi^n(w)f_n \\
\hline
v+w &= \left(\varphi^1(v)+\varphi^1(w)\right)f_1 + \dots + \left(\varphi^n(v)+\varphi^n(w)\right)f_n
\end{aligned}
$$

z drugiej strony

$$v+w = \varphi^1(v+w)f_1 + \dots + \varphi^n(v+w)f_n$$

z jednoznaczności współrzędnych wynika, że

$$\forall i \in \{1 \dots n\} \quad \varphi^i(v+w) = \varphi^i(v) + \varphi^i(w)$$

$$\lambda v = \lambda\varphi^1(v)f_1 + \dots + \lambda\varphi^n(v)f_n$$

oraz

$$\lambda v = \varphi^1(\lambda v)f_1 + \dots + \varphi^n(\lambda v)f_n$$

zatem

$$\forall i \in \{1 \dots n\} \quad \varphi^i(\lambda v) = \lambda\varphi^i(v)$$

Funkcje spełniające te dwa warunki nazywają się liniowe.

Z liniowości współrzędnych wynika ponadto:

$$[v+w]^f = [v]^f + [w]^f \qquad [\lambda v]^f = \lambda [v]^f$$

Przyporządkowanie wektorom $v \in V$ kolumn liczb będących ich współrzędnymi jest odwzorowaniem

$$\phi_f : V \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad \phi_f(v) = [v]^f$$

Odwzorowanie to spełnia warunki

$$\phi_f(v+w) = \phi_f(v) + \phi_f(w) \qquad \phi_f(\lambda v) = \lambda \phi_f(v)$$

Odwzorowanie spełniające powyższe warunki nazywa się liniowe.

Odwzorowanie liniowe odgrywają szczególną rolę w świecie przestrzeni wektorowych. Mówimy, że zachowują strukturę wektorową, ponieważ przeprowadzają dodawanie w dziedzinie na dodawanie w przeciwdziedzinie, mnożenie przez liczbę w dziedzinie na mnożenie przez liczbę w przeciwdziedzinie. Używając „mądrych" słów powiedzielibyśmy, że odwzorowanie liniowe to morfizmy przestrzeni wektorowych.
Odwzorowanie ϕ_f jest dodatkowo odwracalne, czyli jest izomorfizmem.

ZAMIANA WSPÓŁRZĘDNYCH ZWIĄZANA ZE ZMIANĄ BAZY

W przestrzeni $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$ rozważmy dwie bazy: używaną wcześniej bazę f oraz drugą bazę $e = (e_1, e_2, e_3)$. $e_1(t) = t^2$, $e_2(t) = t$, $e_3(t) = 1$.

Baza e jest wyróżnioną bazą w V. Bardzo łatwo odczytać współrzędne w tej bazie z „naturalnej" postaci wielomianu:

$$v(t) = 2t^2 + 3t + 4 = 2e_1(t) + 3e_2(t) + 4e_3(t) \qquad [v]^e = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jak „przeliczyć" współrzędne w bazie e na współrzędne w bazie f?

$$w(t) = at^2 + bt + c = ae_1(t) + be_2(t) + ce_3(t) = \varphi^1 f_1(t) + \varphi^2 f_2(t) + \varphi^3 f_3(t) =$$

$$\varphi^1(t^2 - 1) + \varphi^2(t - 1) + \varphi^3(t + 1)$$

porównujemy

$$\begin{cases} a = \varphi^1 \\ b = \varphi^2 + \varphi^3 \\ c = -\varphi^1 - \varphi^2 + \varphi^3 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} \varphi^2 + \varphi^3 = b \\ -\varphi^2 + \varphi^3 = c + a \\ \hline \varphi^3 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ \varphi^2 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{array}$$

$$\varphi^1 = a$$
$$\varphi^2 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$$
$$\varphi^3 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

SPOSÓB ZAPISU:

$$\varphi^1 = a$$
$$\varphi^2 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$$
$$\varphi^3 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

$$\begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia z bazy e do bazy f.

$$\begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$[v]^f = [id]^f_e \, [v]^e$$

Czym są kolumny macierzy przejścia?

$$[e_1]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [e_2]^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [e_3]^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[e_1]^f = [id]_e^f \, [e_1]^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[e_2]^f = [id]_e^f \, [e_2]^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

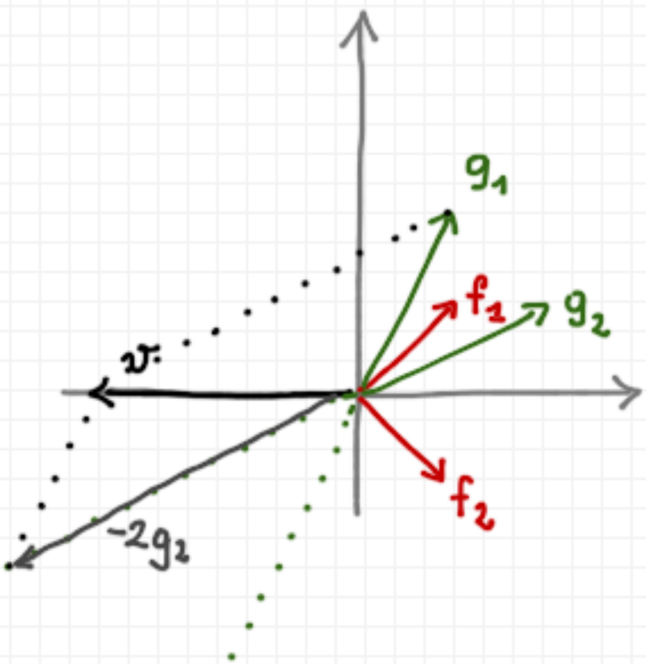
$$[e_3]^f = [id]_e^f \, [e_3]^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

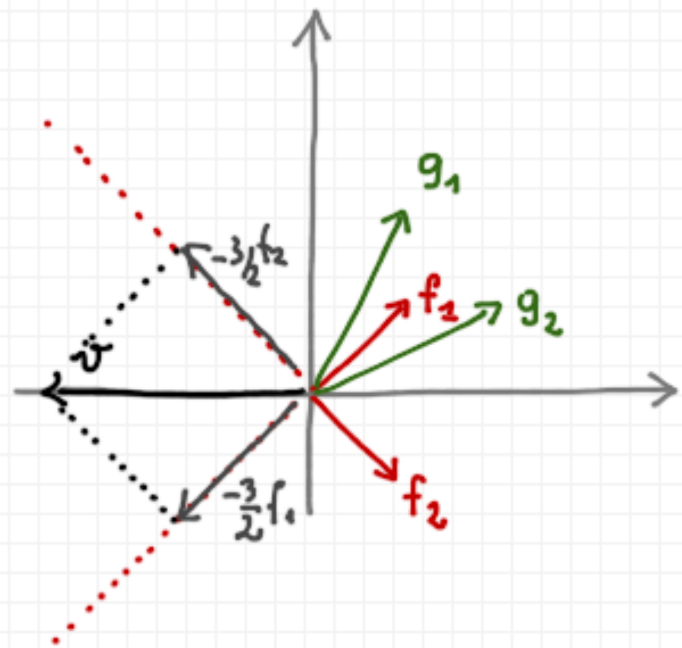
$$[\mathrm{id}]_e^f = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} [e_1]^f & [e_2]^f & [e_3]^f \end{matrix} \end{array}$$

Kolumny macierzy przejście z bazy e do bazy f to wektory z bazy e zapisane we współrzędnych względem bazy f.

PRZYKŁAD W $\mathbb{R}^2$

$V=\mathbb{R}^2$ $\qquad g=\left(\underset{g_1}{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}, \underset{g_2}{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}\right)$ $\qquad f=\left(\underset{f_1}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}, \underset{f_2}{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}\right)$





$[v]^g=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$, tzn $v=g_1-2g_2$ $\qquad$ Macierz przejścia $[id]^f_g=\begin{bmatrix}[g_1]^f & [g_2]^f\end{bmatrix}$

$[id]^f_g=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -3\\ -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$ $\qquad [v]^f=[id]^f_g\,[v]^g=\begin{bmatrix}3/2 & 3/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/2-3\\ -1/2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/2\\ -3/2\end{bmatrix}$

wyznaczcie tę macierz samodzielnie!

W $\mathbb{R}^n$ istnieje wyróżniona baza e: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$, $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ zwana **bazą kanoniczną**.

Każdy element $\mathbb{R}^n$ wygląda tak samo jak jego zapis w bazie kanonicznej.

$v \in \mathbb{R}^3$ $\quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad [v]^e = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \phi_e : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jest identycznością.

Często, nawet w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ używamy innej bazy niż baza kanoniczna. Wybór odpowiedniej bazy często bardzo ułatwia rozwiązanie problemu. Z całą pewnością zaobserwowali to Państwo na zajęciach z fizyki.