NOTATKI DO WYKŁADU Z ALGEBRY Z GEOMETRIĄ 1.

ODWZOROWANIA LINIOWE c.d.

ODWZOROWANIA LINIOWE – ciąg dalszy.

Przypomnienie: Odwzorowanie $F: V \longrightarrow W$ jest liniowe jeśli $\forall \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, v_2 \in V$ zachodzi równość $F(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2) = \lambda^1 F(v_1) + \lambda^2 F(v_2)$. Odwzorowania liniowe są to morfizmy przestrzeni wektorowych. Obraz i przeciwobraz podprzestrzeni wektorowej jest podprzestrzenią wektorową. W szczególności definiujemy

jądro: $\ker F = F^{-1}(\{\bar{0}_W\})$

obraz: $\operatorname{im} F = F(V)$

Jeśli $\ker F = \{\bar{0}_V\}$ to odwzorowanie liniowe jest injekcją. Jeśli $\operatorname{im} F = W$ to odwzorowanie F jest surjekcją. Jeśli zachodzą oba warunki to odwzorowanie F jest bijekcją i można je odwrócić. Odwzorowanie odwrotne $F^{-1}: W \longrightarrow V$ jest też liniowe. Zbiór odwzorowań z V do W oznaczamy $L(V,W)$. Zbiór $L(V,W)$ sam też jest przestrzenią wektorową z działaniami $(F+G)(v) = F(v) + G(v)$; $(\lambda F)(v) = \lambda F(v)$.

NOWY MATERIAŁ:

(1) Odwzorowania liniowe można składać: Niech V, W, U będą przestrzeniami wektorowymi i niech $F \in L(V,W)$, $G \in L(W,U)$. Wówczas $G \circ F$ także jest odwzorowaniem liniowym, co sprawdzamy rachunkiem:

$$G \circ F(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2) = G\big(F(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2)\big) \overset{\text{liniowość } F}{=} G\big(\lambda^1 F(v_1) + \lambda^2 F(v_2)\big) \underset{\text{liniowość } G}{=} \lambda^1 G(F(v_1)) +$$
$$\lambda^2 G(F(v_2)) = \lambda^1 G \circ F(v_1) + \lambda^2 G \circ F(v_2)$$

(2) Podstawowym przykładem przestrzeni wektorowej jest przestrzeń $\mathbb{K}^n$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$. Jak wyglądają odwzorowania liniowe z $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$? Wiemy z całą pewnością, że mnożenie przez macierz n kolumn, m wierszy jest takim odwzorowaniem.

$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_m \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \cdots + a^1_m x^n \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \cdots + a^2_n x^n \\ \vdots \\ a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + \cdots + a^m_n x^n \end{bmatrix}$$

Czy każde odwzorowanie liniowe z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$ polega na mnożeniu przez macierz? Okazuje się, że tak: Niech $F \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. F jest jednoznacznie dane przez wartości na bazie. Weźmy bazę kanoniczną w $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n$$

$$F\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}\right) = F(x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n) = x^1 F(e_1) + x^2 F(e_2) + \cdots + x^n F(e_n)$$

znane elementy z $\mathbb{K}^m$

Oznaczmy $F(e_1) = \begin{bmatrix} f^1_1 \\ f^2_1 \\ \vdots \\ f^m_1 \end{bmatrix}$, $F(e_2) = \begin{bmatrix} f^1_2 \\ f^2_2 \\ \vdots \\ f^m_2 \end{bmatrix}$ $\cdots$ $F(e_n) = \begin{bmatrix} f^1_n \\ f^2_n \\ \vdots \\ f^m_n \end{bmatrix}$

Obliczamy:

$$F\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}\right) = x^1 F(e_1) + x^2 F(e_2) + \cdots + x^n F(e_n) =$$

$$x^1 \begin{bmatrix} f^1_1 \\ \vdots \\ f^m_1 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} f^1_2 \\ \\ f^m_2 \end{bmatrix} + \cdots + x^n \begin{bmatrix} f^1_n \\ \vdots \\ f^m_n \end{bmatrix} =$$

$$= x^1 \begin{bmatrix} f^1_1 \\ \vdots \\ f^m_1 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} f^1_2 \\ \\ f^m_2 \end{bmatrix} + \dots + x^n \begin{bmatrix} f^1_n \\ \vdots \\ f^m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1_1 x^1 + f^1_2 x^2 + \dots + f^1_n x^n \\ f^2_1 x^1 + f^2_2 x^2 + \dots + f^2_n x^n \\ \vdots \\ f^m_1 x^1 + f^m_2 x^2 + \dots + f^m_n x^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f^1_1 & f^1_2 & \cdots & f^1_n \\ f^2_1 & f^2_2 & \cdots & f^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ f^m_1 & f^m_2 & \cdots & f^m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

Okazuje się, że każde liniowe z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$ da się zapisać jako mnożenie przez macierz! Przy okazji dowiedzieliśmy się, że kolumny macierzy są obrazami wektorów z bazy kanonicznej

Wniosek 1: $\operatorname{im} F$ jest rozpięty przez kolumny macierzy f^i_j.

Wniosek 2: $\ker F$ jest zadany przez układ równań jednorodnych, którego macierzą jest f^i_j.

Wniosek 3: Jeśli $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ i $G: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ to $G \circ F: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^l$ jest macierzą otrzymaną z pomnożenia g^i_j przez f^i_j

$$\underset{G}{[g^i_j]} \cdot \underset{F}{[f^j_k]} = \underset{G \circ F}{\left[\sum_{j=1}^{m} g^i_j f^j_k \right]}$$

③ **FAKT:** Niech $F: V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Obowiązuje wzór:

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F$$

Dowód: Niech $\dim V = n$. Oznaczmy także $k = \dim \ker F$ i wybierzmy w $\ker F$ bazę $(v_1, \dots, v_k)$. Oznacza to, że (v_i) liniowo niezależne i $F(v_i) = 0$
Dopełniamy teraz bazę $\ker F$ do bazy V dokładając $n-k$ wektorów $(v_{k+1}, \dots, v_n)$. Mamy teraz $(\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\ker F}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{\text{reszta.}})$

Zauważmy, że $(F(v_{k+1}), \dots, F(v_n))$ rozpinają $\operatorname{im} F$. Istotnie $\operatorname{im} F = \langle \underset{0}{F(v_1)}, \dots, \underset{0}{F(v_k)}, F(v_{k+1}), \dots, F(v_n) \rangle = \langle F(v_{k+1}), \dots, F(v_n) \rangle$. Ponadto stwierdzamy, że $(F(v_{k+1}), \dots, F(v_n))$ tworzą układ liniowo niezależny. Gdyby tak nie było mielibyśmy

$$0 = \lambda^1 F(v_{k+1}) + \lambda^2 F(v_{k+2}) + \dots + \lambda^{n-k} F(v_n) = F(\lambda^1 v_{k+1} + \lambda^2 v_{k+2} + \dots + \lambda^{n-k} v_m)$$

Oznacza to, że $\lambda^1 v_{k+1} + \dots + \lambda^{n-k} v_n \in \ker F$, czyli istnieją $\mu^1, \dots, \mu^k$

$$\lambda^1 v_{k+1} + \dots + \lambda^{n-k} v_n = \mu^1 v_1 + \dots + \mu^k v_k$$

$$\lambda^1 v_{k+1} + \dots + \lambda^{n-k} v_n - \mu^1 v_1 - \dots - \mu^k v_k = 0$$

Układ $(v_1, \dots, v_n)$ jest liniowo niezależny, więc $\lambda^1 = \dots = \lambda^{n-k} = \mu^1 = \dots = \mu^k = 0$.
Skoro $(F(v_{k+1}), \dots, F(v_n))$ rozpinają $\operatorname{im} F$ i są liniowo niezależne to znaczy, że $\dim \operatorname{im} F = m-k$. Mamy więc

$$\underset{\dim V}{n} = \underset{\text{dim kel } F}{k} + \underset{\dim \operatorname{im} F}{m-k}$$

□

4 Macierz odwzorowania liniowego w bazie

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_e"'] & W \arrow[d, "\Phi_f"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{[F]_e^f}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Jak znaleźć macierz odwzorowania F w bazach e i f ?

$$[F]_e^f = \Phi_f \circ F \circ \Phi_e^{-1}$$

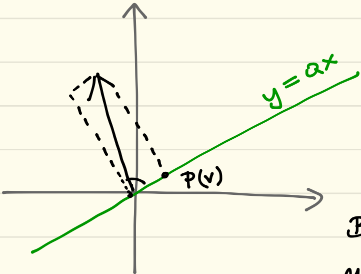
z analizy procedury mnożenia wektora przez macierz wynika, że kolumny tej macierzy są obrazami wektorów $\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\\end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

z drugiej strony wektor $\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} & \begin{matrix}\\\\ i\\\\\\\end{matrix}\end{array}$ przechodzi na e_i w odwzorowaniu Φ_e^{-1}. Dalej mamy $F(e_i)$ i $\Phi_f(F(e_i))$

$$\begin{tikzcd}
e_i \arrow[r, "F"] & F(e_i) \arrow[d] \\
\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} \arrow[u, "\Phi_e^{-1}"] \arrow[r] & {[F(e_i)]^f}
\end{tikzcd}$$

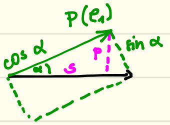
kolumny macierzy $[F]_e^f$ to wektory $F(e_i)$ zapisane w bazie f.

PRZYKŁAD: RZUT PROSTOPADŁY NA PROSTĄ. Zauważmy, że odwzorowanie przyporządkowujące dowolnemu elementowi $\mathbb{R}^2$ jego rzut prostopadły na prostą jest odwzorowaniem liniowym. Znaleźć jego macierz w bazie kanonicznej. Prosta $y=ax$.



I sposób: Odwzorowanie jednoznacznie określone przez wartości na bazie. Wystarczy więc sprawdzić jak wygląda $P\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ i $P\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.

Będziemy potrzebowali prostej prostopadłej do $y=ax$. Zgodnie z zasadami jest to $y=-\frac{1}{a}x$

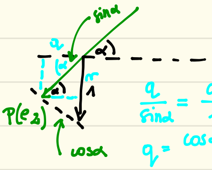


$-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$[P(e_1)]^e=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$\frac{s}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1}$ $\quad s=\cos^2\alpha$

$\frac{p}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1}$ $\quad p=\cos\alpha\sin\alpha$



$\frac{q}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1}$

$q=\cos\alpha\sin\alpha$

$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1}$ $\quad r=\sin^2\alpha$

$$P(e_2)=\begin{bmatrix}\cos\alpha\sin\alpha\\ \sin^2\alpha\end{bmatrix}$$

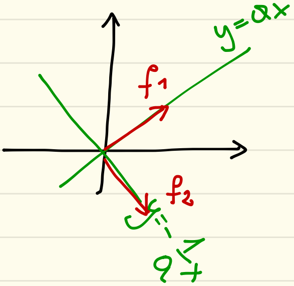
$$[P]_e^e=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix}=\frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1}{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{1+a^2}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{a^2}{1+a^2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{a}{1+a^2}$$

II Sposób:



Weźmy inną bazę w $\mathbb{R}^2$:

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Łatwo stwierdzić, że $P(f_1) = f_1$ a $P(f_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Wobec tego $[P]^f_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pozostaje zamienić bazy. Na szczęście umiemy to zrobić dla wektorów, więc damy radę także dla odwzorowań liniowych. Niech $v \in \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym wektorem z $\mathbb{R}^2$

$$[P(v)]^f = [P]^f_f \, [v]^f$$

$$[P(v)]^e = [id]^e_f \, [P(v)]^f = [id]^e_f \, [P]^f_f \, [v]^f =$$

$$[id]^f_e \, [v]^e$$

$$= \underbrace{[id]^e_f \, [P]^f_f \, [id]^f_e}_{[P]^e_e} \, [v]^e$$

Potrzebujemy $[id]^f_e$ i $[id]^e_f$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Macierze $[id]_f^e$ i $[id]_e^f$ są wzajemnie odwrotne gdyż $[id]_f^e[id]_e^f = [id]_e^e = \mathbb{1}$, $[id]_e^f[id]_f^e = [id]_f^f = \mathbb{1}$. Jeśli mamy $[id]_f^e = \begin{bmatrix}1 & 1\\ a & -\frac{1}{a}\end{bmatrix}$ drugą znajdziemy odwracając.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ a & -\frac{1}{a} & 0 & 1\end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{a}-a & -a & 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1+a^2}{a} & -a & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a^2} & \frac{-a}{1+a^2}\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1-\frac{a^2}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2}\\ 0 & 1 & \frac{a^2}{1+a^2} & \frac{-a}{1+a^2}\end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2}\\ \frac{a^2}{1+a^2} & \frac{-a}{1+a^2}\end{bmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix}1 & a\\ a^2 & -a\end{bmatrix}$$

sprawdzamy: $\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & -\frac{1}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ a^2 & -a\end{bmatrix}\frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix}1+a^2 & a-a\\ -a+a & a^2+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

OK

$$[P]_e^e = [id]_f^e\,[P]_f^f\,[id]_e^f = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & -\frac{1}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}\frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix}1 & a\\ a^2 & -a\end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ a^2 & -a\end{bmatrix}}$$

$$\frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}$$

zero trygonometrii

⑤ RZĄD MACIERZY: Niech A będzie macierzą mającą m wierszy i n kolumn (odwzorowanie liniowe z $\mathbb{K}^n$ do $\mathbb{K}^m$). Tradycyjnie rozważa się rząd kolumnowy macierzy

$rk_K A = \dim\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ wymiar przestrzeni rozpiętej przez kolumny, inaczej $rk_K A = \dim \operatorname{im} A$

oraz rząd wierszowy, czyli liczbę liniowo niezależnych wierszy macierzy A.

TWIERDZENIE: Rząd wierszowy jest równy rzędowi kolumnowemu.

DOWÓD: Korzystamy z interpretacji A jako odwzorowania liniowego. Mamy wzór:

$$\underset{n}{\underset{\parallel}{\dim(\mathbb{K}^n)}} = \dim \ker A + \underbrace{\dim \operatorname{im} A}_{rk_K A}$$

$\ker A$ jest przestrzenią rozwiązań układu równań $Ax = 0$. Wymiar tej przestrzeni (jak dowodziliśmy wcześniej przy okazji badania układów równań liniowych jednorodnych) jest związany z liczbą liniowo niezależnych równań wzorem $\dim \ker A = n - rk_W A$

Podstawiamy:

$$n = n - rk_W A + rk_K A \Rightarrow rk_W A = rk_K A \quad \square$$

Od tej pory będziemy mówić o rzędzie macierzy A bez dodawania przymiotników. $rk A = \dim \operatorname{im} A$

Liczba liniowo niezależnych kolumn jest równa liczbie liniowo niezależnych wierszy.

5 Macierz odwrotna, odwzorowanie odwrotne. Odwzorowanie liniowe jest bijekcją jeśli jego jądro jest trywialne a obraz jest całą przeciwdziedziną

$$F: V \to W$$

$$\ker F = \{0\} \quad \text{i.e.} \quad \dim \ker F = 0$$

$$\operatorname{im} F = W \quad \text{i.e.} \quad \dim \operatorname{im} F = \dim W$$

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F = 0 + \dim W = \dim W$$

F może być bijekcją jedynie jeśli wymiary dziedziny i przeciwdziedziny są jednakowe. Jeśli $V = \mathbb{K}^n$ i $W = \mathbb{K}^m$ oznacza to, że $n = m$. Odwracalna może być jedynie macierz kwadratowe. Jak znaleźć macierz odwrotną?

$$\underset{\text{dane}}{A} \cdot \underset{\text{szukane}}{A^{-1}} = \mathbb{1}$$

Niech $A = [a^i_j]$, $A^{-1} = [b^k_l]$

$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & & & \\ a^n_1 & a^n_2 & a^n_3 & \cdots & a^n_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1_1 & b^1_2 & b^1_3 & \cdots & b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 & b^2_3 & \cdots & b^2_n \\ \vdots & \vdots & & & \\ b^n_1 & b^n_2 & b^n_3 & \cdots & b^n_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e_1 e_2

$$A\, b_2 = e_2$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{1} \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & A^{-1} \end{array}\right]$$

Poszukiwanie macierzy odwrotnej polega na rozwiązywaniu wielu układów równań niejednorodnych jednocześnie. Lewa strona wszystkich układów jest jednakowa a prawe to kolejne wektory bazy standardowej w $\mathbb{K}^n$.

Szczególny przypadek: $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] \overset{w}{\sim}$$

$$d-\frac{bc}{a} = \frac{ad-bc}{a}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1-\frac{-bc}{(ad-bc)} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} \cancel{a} & 0 & \frac{\cancel{a}d}{ad-bc} & -\frac{\cancel{a}b}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] \overset{w}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

diagonalne zamieniają się miejscami
antydiagonalne zmieniają znaki.

wyznacznik

Na zakończenie: czy istnieją inne sposoby wyznaczania macierzy odwrotnej?

ZADANIA NADAJĄCE SIĘ NA ĆWICZENIA

I. Wszelkie zadania w których należy znaleźć jądro i obraz odwzorowania liniowego, jego macierz ...

d

I.1 Sprawdzić, że odwzorowanie $T: \mathbb{R}_3[\cdot] \longrightarrow \mathbb{R}_2[\cdot]$ jest liniowe. Znaleźć jądro i obraz. Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazach kanonicznych w obu przestrzeniach.

I.2 Niech $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$ $W = \mathbb{R}^2_2$ (macierze 2×2) Określmy operator liniowy wzorem $Fv = v(S)$, tzn $F(v) = a_0 \mathbb{1} + a_1 S + a_2 S^2$ jeśli $v(t) = a_0 + a_1 t + a_3 t^2$

Znaleźć (a) bazę $\ker F$, (b) równanie na (x^1, x^2, x^3, x^4) równoważne warunkowi $\begin{bmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{bmatrix} \in \operatorname{im} F$, (c) macierz $[F]_e^f$ gdzie e jest bazą złożoną z jednomianów $1, t, t^2$ a f to $f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $f_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $f_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $f_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

I.3 Znaleźć lub pokazać że nie istnieje macierz S taką, że

$$S\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad S\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad S\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

I.4 Metodą operacji elementarnych obliczyć P^{-1} jeśli

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

I.5 Niech $V = \mathbb{C}^2_2$. Rozważamy $T: V \to V$ $T(A) = \sigma_1 A \sigma_1 - A^T$ dla $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz w bazie złożonej z macierzy σ_i gdzie $\sigma_0 = \mathbb{1}$, σ_1 jak wyżej, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

II Coś odrobinę teoretycznego dla rozrywki.

II.1 Dowieść, że jeśli $\dim V < \infty$ i $F \in L(V,V)$ to następujące warunki są równoważne:

(a) $\forall k \in \mathbb{N}\ \ker F^k = \ker F$, (b) $\ker F^2 = \ker F$ (c) $\ker F \cap \operatorname{im} F = \{0\}$

(d) $V = \ker F \oplus \operatorname{im} F$

II.2 Dowieść, że dla $F \in L(V,W)$ oraz dla $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V$ równoważne są następujące warunki

(1) układ $\left(F(v_1), \dots, F(v_n)\right)$ jest liniowo niezależny

(2) układ $(v_1, \dots, v_n)$ jest liniowo niezależny i $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \cap \ker F = \{0\}$