

Wyznacznik macierzy

Niech V będzie n -wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych $\mathbb{K}$. *Formą k -liniową* na przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie:

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe ze względu na każdy argument, tzn. dla każdego i , dowolnych wektorów v_j , $j = 1 \dots k$, v'_i i dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\omega(v_1, v_2, \dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots, v_k) = \lambda \omega(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k) + \mu \omega(v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_k)$$

Wśród wszystkich form k -liniowych wyróżnimy teraz szczególnie funkcje *antysymetryczne*, to znaczy mające własność

$$(1) \quad \omega(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

dla dowolnych $i \neq j$. Formy k -liniowe antisymetryczne nazywane są też k -formami antisymetrycznymi, lub czasem k -kovektorami.

Omawiając odwzorowania liniowe stwierdziliśmy, że wartość odwzorowania jest jednoznacznie określona przez wartości na wektorach bazowych. Rozważmy przypadek $k = 2$. Na przestrzeni n -wymiarowej do zdefiniowania dwuformy Q potrzeba n^2 liczb: $Q(e_i, e_j)$ dla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jeśli wiadomo, że forma jest symetryczna, wtedy wystarczy $n(n+1)/2$ wartości. Jeśli forma jest antisymetryczna potrzeba jeszcze mniej $n(n-1)/2$, gdyż wyrazy diagonalne Q_{ii} muszą być zero: z warunku antisymetrii wynika, że dla dowolnego $v \in V$

$$Q(\textcolor{red}{v}, \textcolor{blue}{v}) = -Q(\textcolor{blue}{v}, \textcolor{red}{v})$$

Po opuszczeniu kolorów (w końcu $\textcolor{red}{v}$ i $\textcolor{blue}{v}$ to ostatecznie ten sam wektor v) dostajemy

$$(2) \quad Q(v, v) = -Q(v, v),$$

czyli $Q(v, v) = 0$. Innymi słowy przestrzeń wektorowa wszystkich form dwuliniowych ma wymiar n^2 a podprzestrzeń form symetrycznych i antisymetrycznych wymiary odpowiednio $n(n+1)/2$ i $n(n-1)/2$. Jeśli zauważymy ponadto, że forma, która jest jednocześnie symetryczna i antisymetryczna musi być zerowa, oraz że

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = n^2$$

zrozumiemy, że przestrzeń wszystkich form dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni form symetrycznych i podprzestrzeni form antisymetrycznych. Każda forma dwuliniowa da się więc rozłożyć w sposób jednoznaczny na część symetryczną i antisymetryczną:

$$Q(v, w) = Q_-(v, w) + Q_+(v, w)$$

$$Q_-(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) - Q(w, v)], \quad Q_+(v, w) = \frac{1}{2}[Q(v, w) + Q(w, v)].$$

Dla $k > 2$ także jest prawdą, że forma k -liniowa jest jednoznacznie określona przez wartości na bazie, zatem przestrzeń takich odwzorowań jest przestrzenią wektorową wymiaru n^k . W tej przestrzeni są także wyróżnione podprzestrzenie form symetrycznych i antisymetrycznych, których częścią wspólną jest przestrzeń zerowa, ale podprzestrzenie te nie wyczerpują przestrzeni

wszystkich form. Zastanówmy się nad wymiarem przestrzeni $Alt^k(V)$ form antysymetrycznych. Niech ω oznacza formę antysymetryczną. W zbiorze n^k liczb

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$$

jest wiele zer. Wystarczy, że w układzie $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ którykolwiek wektor bazowy powtarza się, a już wartość ω na tym układzie musi być równa zero jak w (2). Jeśli zaś układ $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ nie zawiera powtarzających się wektorów, to wartość ω na tym układzie różni się od wartości ω na układzie zawierającym te same wektory tylko uporządkowane rosnąco ze względu na indeks, tylko znakiem. **Wniosek:** do zdefiniowania k -formy wystarczy tyle liczb ile jest różnych podzbiorów k -elementowych w zbiorze n -elementowym. Z kombinatoryki wiadmo, że jest ich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{tzn.} \quad \dim Alt^k(V) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Powyższe rozważania prowadzą także do wniosku, że przestrzeń k -form dla $k > n$ jest zerowa, natomiast przestrzeń n -form ma wymiar równy 1.

Przejdziemy teraz do n -form na n -wymiarowej przestrzeni $\mathbb{K}^n$. Z poprzednich rozważań wynika, że jest to przestrzeń jednowymiarowa. Ponieważ w przestrzeni $\mathbb{K}^n$ jest wyróżniona baza standardowa możemy także wyróżnić jedną n -formę: mianowicie tę, która na bazie standardowej

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

daje wynik 1. Formę tę oznaczать będziemy vol , i nazywać formą objętości na $\mathbb{K}^n$:

$$\text{vol}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1.$$

Od formy vol już jeden krok do wyznaczników macierzy $n \times n$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$. Niech $A \in \mathbb{K}_n^n$, wtedy A reprezentuje odwzorowanie $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. Wyznacznik ($\det$) macierzy A definiujemy wzorem

$$(3) \quad \det A = \text{vol}(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n).$$

Pamiętając ponadto, że $Ae_i = a_i$ (i -ta kolumna macierzy A) możemy napisać

$$\det A = \text{vol}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Wzór (3) definiujący wyznacznik macierzy nie daje przepisu na to, jak obliczyć wyznacznik dla konkretnej macierzy. Zanim jednak wypiszemy stosowną formułę, zajmiemy się własnościami wyznacznika.

Zauważmy najpierw, że odwzorowanie:

$$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \ni (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \text{vol}(Ba_1, Ba_2, \dots, Ba_n)$$

jest elementem $Alt^n(\mathbb{K}^n)$, zatem jest proporcjonalne do vol , tzn

$$\text{vol}(Ba_1, Ba_2, \dots, Ba_n) = f(B) \text{vol}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Współczynnik proporcjonalności oznaczyłam $f(B)$, ponieważ zależy on tylko od macierzy B , a nie od tego jakie są wektory a_i . Biorąc $a_i = e_i$ dostajemy

$$\det(Be_1, Be_2, \dots, Be_n) = f(B) \text{vol}(e_1, e_2, \dots, e_n) = f(B),$$

czyli $f(B) = \det B$. Możemy teraz łatwo policzyć $\det(BA)$:

$$\det(BA) = \text{vol}(BAe_1, BAe_2, \dots, BAe_n) = \text{vol}(Ba_1, Ba_2, \dots, Ba_n) = \det(B) \text{vol}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det(B) \det(A).$$

Udowodniliśmy tym samym twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników:

Twierdzenie 1 (Cauchy).

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Twierdzenie Cauchy'ego prowadzi do pożytecznych wniosków

(1) Jeśli macierz A jest odwracalna, to $\det A \neq 0$ i

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Istotnie, z twierdzenia Cauchy'ego mamy

$$1 = \det(\mathbf{1}) = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}.$$

(2) $\det A \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy A ma liniowo zależne kolumny. Istotnie, Załóżmy, że a_i jest liniową kombinacją pozostałych kolumn, tzn

$$a_i = \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^{i-1} a_{i-1} + \lambda^{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda^n a_n.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \det A &= \text{vol}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = \text{vol}(a_1, \dots, \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^{i-1} a_{i-1} + \lambda^{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda^n a_n, \dots, a_n) = \\ &= \lambda^1 \text{vol}(a_1, \dots, a_1, \dots, a_n) + \lambda^2 \text{vol}(a_1, \dots, a_2, \dots, a_n) + \dots + \lambda^{i-1} \text{vol}(a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, a_n) + \\ &+ \lambda^{i+1} \text{vol}(a_1, \dots, a_{i+1}, \dots, a_n) + \dots + \lambda^n \text{vol}(a_1, \dots, a_n, \dots, a_n) = 0 \end{aligned}$$

Gdy dwa z argumentów formy antysymetrycznej powtarzają się, wartość tej formy jest zero. Każdy ze składników powyższej sumy musi więc być równy zero. Dowód wynikania w drugą stronę przebiega następująco (*ad absurdum*): Załóżmy, że A ma liniowo niezależne kolumny. Układ wektorów $(a_1, \dots, a_n)$ stanowi więc bazę $\mathbb{K}^n$. Definiujemy n -formę antysymetryczną ω_A wzorem $\omega_A(a_1, \dots, a_n) = 1$. Jest to poprawna definicja, gdyż przestrzeń n -form na przestrzeni n -wymiarowej ma wymiar 1. Wobec tego ω_A jest proporcjonalna do vol : $\omega_A = \lambda \text{vol}$ i współczynnik proporcjonalności nie może być równy 0. Wstawiając do obu stron $(a_1, \dots, a_n)$ otrzymujemy $\omega_A(a_1, \dots, a_n) = \lambda \text{vol}(a_1, \dots, a_n)$, tzn. $1 = \lambda \det A$. Wynika z tego, że $\det A \neq 0$.

□

Macierz $n \times n$ mająca liniowo niezależne kolumny jest odwzorowaniem surjektywnym („na”), tzn $\dim \text{im } A = n$. Ze wzoru

$$\dim \ker A + \dim \text{im } A = n$$

wynika więc, że jądro A jest trywialne. Odwzorowanie zadawane przez macierz A jest bijekcją, jest więc odwracalne. Punkty (1) i (2) można zapisać wspólnie formułując

Fakt 1. *Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.*

Wiemy już sporo o wyznaczniku, ale nadal nie wiemy jak go liczyć - nie znamy konkretnego wzoru, który wyrażałby wyznacznik w zależności od wyrazów macierzy. Wróćmy więc do

definicji. Niech A będzie macierzą o wyrazach a^i_j , tzn a^i_j jest i -tą współrzędną j -tej kolumny macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{bmatrix}, \quad a_i = a^1_i e_1 + a^2_i e_2 + \cdots + a^n_i e_n.$$

$$(4) \quad \det A = \text{vol}(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$

$$\begin{aligned} \text{vol}(a^1_1 e_1 + a^2_1 e_2 + \cdots + a^n_1 e_n, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{i_1=1}^n a^{i_1}_1 \text{vol}(e_{i_1}, a_2, \dots, a_n) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \text{vol}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, a_n) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n \text{vol}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

Większość z liczb $\text{vol}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$ jest równa zero. Różne od zera są tylko te, w których wszystkie argumenty formy objętości są różne. Oznacza to, że każdy z elementów bazy pojawia się tylko raz w ciągu $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$. W takim przypadku forma objętości przyjmuje wartość 1 lub -1 w zależności od kolejności wektorów bazowych. Ciąg indeksów $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ przy wektorach bazowych zawiera każdą liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ dokładnie raz. Jest więc permutacją (przestawieniem) ciągu $(1, 2, \dots, n)$. Oznacza to, że suma (4) ma tak naprawdę $n!$ składników, po jednym dla każdej permutacji. Znak $+$ bądź $-$ zależy od tego, czy daną permutację można otrzymać z uporządkowania naturalnego dokonując parzystej czy nieparzystej liczby transpozycji, (znak permutacji). Wzór na wyznacznik przyjmuje postać

$$(5) \quad \det A = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a^{\sigma(1)}_1 a^{\sigma(2)}_2 \cdots a^{\sigma(n)}_n.$$

Obejrzyjmy najprostsze przykłady wyznaczników:

Przykład 1. Wyznacznik macierzy 2×2 , tzn. $A \in \mathbb{K}^2_2$:

$$A = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix}.$$

Są dwa uporządkowania liczb $\{1, 2\}$,

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jet jasne, że $\text{sgn } id = 1$, $\text{sgn } \sigma = -1$. Ostatecznie

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix} = \text{sgn } id a^{id(1)}_1 a^{id(2)}_2 + \text{sgn } \sigma a^{\sigma(1)}_1 a^{\sigma(2)}_2 = a^1_1 a^2_2 - a^2_1 a^1_2.$$



Przykład 2. Niech teraz $A \in \mathbb{K}^3_3$. Zajmijmy się najpierw permutacjami. Istnieje $3! = 6$ elementów S_3 . Mamy

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = +1 \quad \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = +1 \quad \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +1 \quad \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Posługując się powyższą tabelką możemy napisać wzór:

$$\det A = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{bmatrix} = a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^2_1 a^3_2 a^1_3 + a^3_1 a^1_2 a^2_3 -$$

$$- a^1_1 a^3_2 a^2_3 - a^3_1 a^2_2 a^1_3 - a^2_1 a^1_2 a^3_3$$

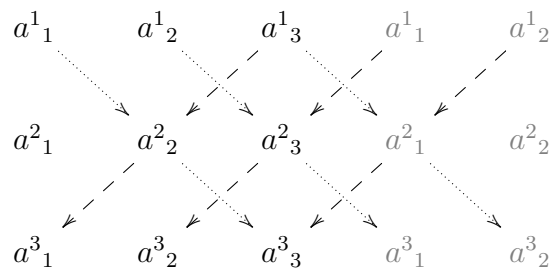
Ponieważ problem liczenia wyznacznika macierzy 3×3 pojawia się bardzo często w zadaniach, wygodnie jest znaleźć sposób zapamiętywania powyższego wzoru. Niektórzy lubią pamiętać obrazki. Dodatnie iloczyny symbolizują następujące obrazki

$$\begin{bmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & \\ & & \bullet \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & \bullet \\ \bullet & & \\ & \bullet & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & \bullet & \\ & & \bullet \\ \bullet & & \end{bmatrix},$$

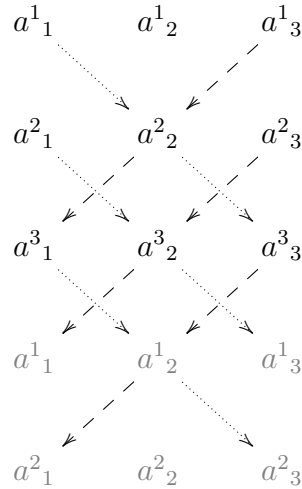
ujemne

$$\begin{bmatrix} \bullet & & \\ & & \bullet \\ & \bullet & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & \bullet \\ \bullet & & \\ & \bullet & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & \bullet & \\ \bullet & & \\ & & \bullet \end{bmatrix}.$$

Inni wolą tzw. schemat Sarrusa w wersji poziomej (dodatnie kropkowane, ujemne kreskowane)



a jeszcze inny schemat Sarrusa w wersji pionowej



Przykład 3. Wyznacznik macierzy 4×4 ma $4! = 24$ składniki - nie chce nam się wypisywać *explicite!* ♣

Zauważmy, że każda permutacja (będąc bijekcją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ w siebie) jest odwracalna, tzn. dla każdego σ istnieje ρ takie, że

$$\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma = \text{id}, \text{ tzn. } \rho = \sigma^{-1}.$$

Chwila zastanowienia daje wniosek, że

$$\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}.$$

Permutacja σ^{-1} składa się z tych samych transpozycji co σ , tylko zastosowanych w odwrotnej kolejności. Dzięki temu możemy udowodnić twierdzenie:

Fakt 2.

$$\det A = \det A^T.$$

Dowód: Korzystamy ze wzoru:

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a^{\sigma(1)}_1 a^{\sigma(2)}_2 \cdots a^{\sigma(n)}_n =$$

i przestawiamy wyrazy w każdym iloczynie $a^{\sigma(1)}_1 a^{\sigma(2)}_2 \cdots a^{\sigma(n)}_n$ tak, aby były uporządkowane zgodnie z kolejnością górnych indeksów. Otrzymujemy wtedy

$$= \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a^1_{\sigma^{-1}(1)} a^2_{\sigma^{-1}(2)} \cdots a^n_{\sigma^{-1}(n)} =$$

Ponieważ każda permutacja ma odwrotną, a znaki σ i σ^{-1} są takie same, możemy sumować po σ^{-1} :

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \text{sgn } \sigma^{-1} a^1_{\sigma^{-1}(1)} a^2_{\sigma^{-1}(2)} \cdots a^n_{\sigma^{-1}(n)} =$$

Jeśli teraz $B = A^T$, to $b^i_j = a^j_i$ zatem

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \text{sgn } \sigma^{-1} b^{\sigma^{-1}(1)}_1 b^{\sigma^{-1}(2)}_2 \cdots b^{\sigma^{-1}(n)}_n =$$

Żeby uniknąć niejasności oznaczamy wskaźnik sumowania przez ρ i dostajemy

$$= \sum_{\rho} \operatorname{sgn} \rho b^{\rho(1)}_1 b^{\rho(2)}_2 \dots b^{\rho(n)}_n = \det B = \det A^T.$$

□.

Wzór z permutacjami jest trochę mało praktyczny. Już dla macierzy 4×4 sumować musimy 24 składniki. Warto wymyśleć jakiś wygodniejszy wzór. W poniższych rozważaniach skorzystamy z faktu, że wyznacznik jest wieloliniowy ze względu na kolumny macierzy oraz że nie zmienia się jeśli do kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych. Przyjrzyjmy się bliżej tej drugiej własności - do k -tej kolumny dodamy wielokrotność pierwszej:

$$\operatorname{vol}(a_1, a_2, \dots, a_k + \lambda a_1, \dots, a_n) = \operatorname{vol}(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n) + \lambda \operatorname{vol}(a_1, a_2, \dots, a_1, \dots, a_n)$$

Drugi składnik sumy jest równy zero, gdyż na miejscu k -tym i pierwszym stoi ten sam wektor.

Ustalmy teraz macierz A , jej kolumny $a_1, \dots, a_n$ i indeks $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\det A = \operatorname{vol}(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) =$$

Zapisujemy a_i w bazie standardowej: $a_i = a^1_i e_1 + a^2_i e_2 + \dots + a^n_i e_n$:

$$= \operatorname{vol}(a_1, a_2, \dots, a^1_i e_1 + a^2_i e_2 + \dots + a^n_i e_n, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a^j_i \operatorname{vol}(a_1, a_2, \dots, e_j, \dots, a_n).$$

popatrzmy na k -ty składnik powyższej sumy:

$$a^k_i \operatorname{vol}(a_1, a_2, \dots, e_k, \dots, a_n) = a^k_i \det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & 0 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & 0 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^k_1 & a^k_2 & \dots & 1 & \dots & a^k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & 0 & \dots & a^n_n \end{bmatrix} =$$

Przy pomocy 1 w i -tej kolumnie i k -tym wierszu można wyzerować prawie cały k -ty wiersz odejmując od wszystkich kolumn poza i -tą wektor $a^k_j e_k$:

$$\begin{aligned} &= a^k_i \operatorname{vol}(a_1, a_2, \dots, e_k, \dots, a_n) = \\ &= a^k_i \operatorname{vol}(a_1 - a^k_1 e_k, a_2 - a^k_2 e_k, \dots, e_k, \dots, a_n - a^k_n e_k) = \\ &= a^k_i \det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & 0 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & 0 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & 0 & \dots & a^n_n \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Przestawiamy teraz i -tą kolumnę na pierwsze miejsce zmieniając znak $i - 1$ razy, a następnie k -ty wiersz na pierwsze miejsce zmieniając znak $k - 1$ razy:

$$= (-1)^{i-1}(-1)^{k-1}a^k_i \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_{i-1} & a^1_{i+1} & \cdots & a^1_n \\ 0 & a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_{i-1} & a^2_{i+1} & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^{k-1}_1 & a^{k-1}_2 & \cdots & a^{k-1}_{i-1} & a^{k-1}_{i+1} & \cdots & a^{k-1}_n \\ 0 & a^{k+1}_1 & a^{k+1}_2 & \cdots & a^{k+1}_{i-1} & a^{k+1}_{i+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_{i-1} & a^n_{i+1} & \cdots & a^n_n \end{bmatrix}.$$

Bez trudu stwierdzimy, że ostatni wyznacznik jest równy wyznacznikowi macierzy $(n-1) \times (n-1)$ postaci

$$\det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_{i-1} & a^1_{i+1} & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_{i-1} & a^2_{i+1} & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{k-1}_1 & a^{k-1}_2 & \cdots & a^{k-1}_{i-1} & a^{k-1}_{i+1} & \cdots & a^{k-1}_n \\ a^{k+1}_1 & a^{k+1}_2 & \cdots & a^{k+1}_{i-1} & a^{k+1}_{i+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_{i-1} & a^n_{i+1} & \cdots & a^n_n \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy z wykreślonym k -tym wierszem i i -tą kolumną pomnożony przez $(-1)^{k+i}$ nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** wyrazu a^k_i i oznaczamy A^i_k . Zwróćmy uwagę na położenie indeksów!!! Wstawiamy dotychczasowe ustalenia do początkowego wzoru na wyznacznik i otrzymujemy

$$\det A = \sum_{j=1}^n a^j_i A^i_j$$

Powyższy wzór nazywa się **Rozwinięciem Laplace'a** względem i -tej kolumny. Z niezmienniczości wyznacznika względem transpozycji wynika, że można rozwijać także względem wiersza, wtedy rozwinięcie Laplace'a ma postać (rozwinięcie względem j -tego wiersza)

$$\det A = \sum_{k=1}^n a^j_k A^k_j.$$

Rozwinięcie Laplace'a wykorzystać można do wyprowadzenia dwóch pożytecznych wzorów: **wzoru na macierz odwrotną** i tzw. **wzorów Cramera** dotyczących problemu rozwiązywania niezdegenerowanych układów równań liniowych.

Wzór na macierz odwrotną. Niech A będzie macierzą $n \times n$ taką, że $\det A \neq 0$. Wtedy, jak wiadomo, istnieje A^{-1} . Oznaczmy przez A^D macierz

$$A^D = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix}$$

zwaną *macierzą dopełnień algebraicznych* albo *macierzą dołączoną*. Obliczmy iloczyn AA^D :

$$AA^D = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix}.$$

Wyraz diagonalny na pozycji $*^k_k$ ma postać:

$$\sum_{j=1}^n a^k_j A^j_k = \det A.$$

skorzystaliśmy z rozwinięcia Laplace'a. Wyraz pozadiagonalny $*^k_l$ dla $k \neq l$ ma postać

$$\sum_{j=1}^n a^k_j A^j_l$$

Powyższa suma jest równa zero, gdyż zgodnie z rozwinięciem Laplace'a jest to wyznacznik macierzy w której w k -tym i l -tym wierszu stoi ten sam k -ty wiersz wyjściowej macierzy A . Otrzymujemy więc

$$AA^D = \det A \cdot \mathbf{1}.$$

Podobnie okazuje się, że

$$A^D A = \det A \cdot \mathbf{1}.$$

W uzasadnieniu wykorzystuje się rozwinięcie Laplace'a względem kolumny, a nie wiersza. W ten sposób uzyskujemy wzór:

Fakt 3. *Jeśli $\det A \neq 0$ to*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D.$$

Wzory Cramera. Niech teraz A będzie macierzą układu równań:

$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \cdots + a^1_n x^n = b^1 \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \cdots + a^2_n x^n = b^2 \\ \vdots \\ a^n_1 x^1 + a^n_2 x^2 + \cdots + a^n_n x^n = b^n \end{cases} \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Jeśli $\det A$ jest różne od zera to istnieje A^{-1} i układ równań ma jedno rozwiązanie:

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}.$$

Korzystając ze wzoru na macierz odwrotną stwierdzamy, że k -ta współrzędna wektora $\vec{x}$ ma postać

$$x^k = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n A^k_j b^j.$$

Ze wzoru na rozwinięcie Laplace'a względem k -tej kolumny wynika, że

$$\sum_{j=1}^n A^k_j b^j$$

jest wyznacznikiem macierzy A w której k -tą kolumnę podmieniono na wyraz wolny:

$$\sum_{j=1}^n A^k_l b^l = \det \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & b^1 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & b^2 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & b^n & \dots & a^n_n \end{bmatrix}.$$

ZADANIA

① Obliczyć wyznacznik nie używając kalkulatora.

$$D = \det \begin{bmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{bmatrix}$$

② Niech $\varphi: \overbrace{V \times \dots \times V}^r \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą r -liniową antysymetryczną. Pokazać że dla macierzy $A \in \mathbb{R}^r_r$ zachodzi

$$\varphi(\tilde{v}_1 \hat{a}_1 + \dots + \tilde{v}_r \hat{a}_1, \dots, \tilde{v}_1 \hat{a}_r + \dots + \tilde{v}_r \hat{a}_r) = \varphi(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r) \det A$$

dla dowolnych $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r \in V$

③ Sprawdzić, że liczba

$$D = \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 8 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

jest podzielna przez 41 wiedząc, że liczby 3403, 1581, 5043, 9471 są wielokrotnościami 41.

④ Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ a & a & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

⑤ Wyznaczniki pasmowe. Równania rekurencyjne, które się w nich pojawiają będą stanowić dobry wstęp do zagadnień związanych z obliczaniem funkcji od macierzy.