

Egzamin pisemny z Algebry z geometrią I

7 lutego 2015

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator schowany.

Zadanie 1.

Oblicz sumę (wynik przedstawić jako funkcję wymierną od funkcji trygonometrycznych, niezawierającą znaku sumy oraz wyrażeń zespolonych):

$$\sum_{k=0}^n \sin((k+1)\phi) \cos(k\phi)$$

Zadanie 2.

Permutacja zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 19\}$ zadana jest wzorem:

$$\sigma(n) = 3n \pmod{20}$$

- Znajdź rozkład σ na cykle rozłączne
- Podaj rząd i znak permutacji σ
- Oblicz σ^{2015}

Zadanie 3.

Dane są dwie podprzestrzenie $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$: $V_1 = \{X : \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} X = 0\}$ i $V_2 = \{X : X \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\}$. Znaleźć bazę $V_1 \cap V_2$ i równania opisujące $V_1 + V_2$.

Zadanie 4.

Niech $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ przeprowadza $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ na $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ na $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć $[T]^f_e$ jeśli:

$$f = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right), \quad e = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Zadanie 5.

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} (p-5)x + 2y + z = 1, \\ 2x + (p-2)y + 2z = 2, \\ x + 2y + (p-5)z = 1 \end{cases}$$

w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.