DRUGI EGZAMIN PRZYKŁADOWY

Zadanie 1: Rozwiązać równanie $z^2(p+z)=p+\bar{z}$ jeśli $p\in\,]-2,2[\,\subset\mathbb{R}$ jest parametrem.

$z^2(p+z)=p+\bar{z}\quad p\in\mathbb{R}\Rightarrow \bar{z}^2(p+\bar{z})=p+z\quad z^2\left[\bar{z}^2(p+\bar{z})\right]=p+\bar{z}$

$|z|^4(p+\bar{z})=p+\bar{z}\quad (|z|^4-1)(p+\bar{z})=0 \Rightarrow |z|^4=1$ lub

$\bar{z}=-p \rightarrow z=-p$

$|z|=1 \rightarrow z=e^{i\varphi}$

$e^{2i\varphi}(p+e^{i\varphi})=p+e^{-i\varphi}$

$(e^{2i\varphi}-1)p=e^{-i\varphi}-e^{3i\varphi}\quad \cancel{e^{i\varphi}}p(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})=\cancel{e^{i\varphi}}(e^{-2i\varphi}-e^{2i\varphi})$

$p\sin\varphi=-\sin 2\varphi\quad p\sin\varphi=-2\sin\varphi\cos\varphi$

$\sin\varphi=0$ lub $p=-2\cos\varphi\quad \frac{-p}{2}=\cos\varphi$

$\varphi=k\pi \rightarrow \varphi=0,\ \varphi=\pi$

$z=\pm1$

$\cos\varphi=-\frac{p}{2}\rightarrow \sin\varphi=\pm\sqrt{1-p^2/4}$

$\sin\varphi=\pm\frac{\sqrt{4-p^2}}{2}$

$z=-\frac{p}{2}\pm i\frac{\sqrt{4-p^2}}{2}$

Zadanie 2: Dla jakich wartości $z\in\mathbb{C}$ układ wektorów

$\begin{bmatrix} z\\ i\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} i\\ z^2\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1-i\\ 0\\ z^3\end{bmatrix}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{C}^3$?

$$\det\begin{bmatrix} z & i & 1-i \\ i & z^2 & 0 \\ 0 & 1 & z^3 \end{bmatrix} = z^6 + 0 + i(1-i) - i^2 z^3 = z^6 + z^3 + (i+1) = 0$$

$$(z^3)^2 + z^3 + (i+1) = 0 \qquad \Delta = 1 - 4\cdot 1\cdot (i+1) = 1 - 4i - 4 = -3-4i$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3-4i} \qquad \sqrt{\Delta} = a+ib \qquad a^2 - b^2 + i2ab = -3-4i$$

$$a^2-b^2=-3 \qquad 2ab=-4 \qquad ab=-2 \qquad a=-2/b \qquad \left(-\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = -3$$

$$\frac{4}{b^2} - b^2 = -3 \qquad 4 - b^4 = -3b^2 \qquad b^4 - 3b^2 - 4 = 0 \qquad \left(b^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = 0$$

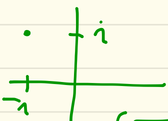
$$\left(b^2-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \qquad \left(b^2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(b^2 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0 \qquad (b^2-4)(b^2+1) = 0$$

$$b = \pm 2 \qquad a = -\frac{2}{b} = \mp 1 \qquad \Delta = -1+2i, \quad \Delta = +1-2i$$

$$z^3 = \frac{-1+(-1+2i)}{2} = -1+i \qquad z^3 = \frac{-1+(1-2i)}{2} = -i$$

Dalej nalezy obliczyć $\sqrt[3]{-1+i}$ oraz $\sqrt[3]{-i}$

$$-1+i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$$



$$\sqrt[3]{-1+i} = \left\{ \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/4},\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/4 + i\,2\pi/3},\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/4 + i\,4\pi/3} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}(1+i),\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\,11\pi/12},\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\,19\pi/12} \right\}$$

$$\sqrt[3]{-i} = ? \qquad -i = e^{+\frac{3\pi}{2} i}$$

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ e^{i\pi/2},\ e^{i\pi/2 + \frac{2\pi}{3} i},\ e^{i\pi/2 + \frac{4\pi}{3} i} \right\} = \left\{ i,\ e^{i\frac{7\pi}{6}},\ e^{i\frac{11\pi}{6}} \right\}$$

Zadanie 3: Znaleźć, o ile istnieje, macierz S taką, że

$$S\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix} \qquad S\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix} \qquad S\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}$$

Zadanie 4: Rozwiązać względem $x \in \mathbb{R}^3$ układ równań:

$$\begin{bmatrix} p-2 & p+1 & 2 \\ 1 & p-1 & p-1 \\ -1 & 2 & p+1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$ w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

Zadanie 5: Obliczyć liczbę inwersji oraz znak permutacji

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m & 2m+1 & 2m+2 & \cdots & 3m \\ m+1 & m+2 & \cdots & 3m & 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$