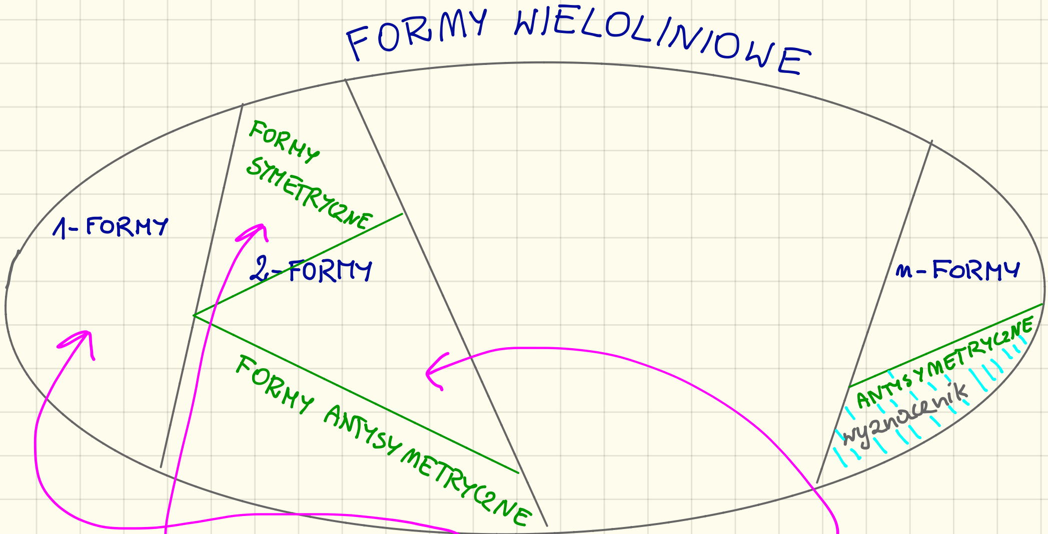
PRZESTRZEŃ SPRZĘŻONA

DRUGI SEMESTR, 27 lutego 2015

MOTYWACJE



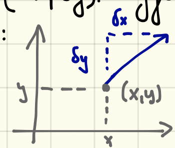
Zajmować się będziemy najpierw tym kawałkiem, potem tamtym, a szczególnie dokładnie tym „podkawałkiem"

Powstaje oczywiście naturalne pytanie po co nam to. Postaram się przedstawić kilka motywacji.

(1) Po pierwszym wykładzie z analizy znają już Państwo sposób na przybliżanie funkcji przy pomocy wielomianu w otoczeniu ustalonego punktu:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h+\frac{1}{2}f''(x)\cdot h^2+R(x,h)$$

Pochodna funkcji w punkcie oraz druga pochodna w punkcie są liczbami rzeczywistymi. A jak jest dla funkcji zależnej od więcej niż jednej zmiennej? Niech teraz $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Współrzędne nazwiemy (x,y). Zamiast przyrostu h mamy teraz przyrosty dwóch zmiennych $(\delta x,\delta y)$. Wygodnie jest traktować te przyrosty jak współrzędne wektora przesunięcia:



Wektory przesunięcia, zaczepione w (x,y) tworzą oczywiście rowną przestrzeń wektorową.

Na wykładzie z analizy dowiedzą się państwo wkrótce, że odpowiedni wzór przybliżający funkcję f w otoczeniu punktu (x,y) z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu w (x,y) ma następującą postać

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\delta x\,\delta y + R(x,y,\delta x,\delta y)$$

Bardziej przejrzyście można zapisać go w postaci

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}} + \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \delta x & \delta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}} + R$$

Fragment zaznaczony na różowo to działanie macierzy o dwóch kolumnach i jednym wierszu $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right]$ na wektor $\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix}$. Macierz taka to, jak wiemy, odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, a więc jednoforma liniowa. Zatem przynajmniej jeden powód zajmowania się jednoformami już jest: pochodna funkcji wielu zmiennych jest jednoformą na przestrzeni „przyrostów". Wyrażenie zaznaczonego na niebiesko prawdopodobnie nie będą Państwo mogli łatwo rozpoznać: jest to dwuforma liniowa symetryczna obliczona na wektorze $\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix}$ wstawionym w oba miejsca przeznaczone na argumenty. Jeśli więc przestrzeń przyrostów oznaczymy $V\ (\simeq \mathbb{R}^2)$ to $f''(x,y): V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$, dwuliniowe. Część na niebiesko to $f''(x,y)(h,h)$ gdzie $h = \begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix}$. Szukając ekstremów funkcji jednej zmiennej wyznaczaliśmy miejsca zerowe pochodnej, rodzaj ekstremum można było określić na podstawie znaku drugiej pochodnej. Podobnie będzie dla funkcji wielu zmiennych. Umiejętność posługiwania się jedno i dwuformami jest więc niezbędna.

(2) Jest wiele wielkości fizycznych, których matematycznym reprezentantem jest jednoforma. Są to np: pęd, siła, natężenie pola elektrostatycznego. W tradycyjnych kursach mechaniki i elektrodynamiki wszystkie powyższe wielkości są uważane za wektorowe. Jest to możliwe ponieważ przestrzeń fizyczna jest wyposażona w iloczyn skalarny, który umożliwia utożsamianie wektorów z kowektorami.

(3) Iloczyn skalarny powszechnie używany w teoriach fizycznych jest dwuformą symetryczną.

(4) Dwuformą jest także moment bezwładności, charakteryzujący ruch obrotowy bryły sztywnej.

(5) Metryka Minkowskiego z mechaniki relatywistycznej pochodzi od dwuformy symetrycznej.

FORMY LINIOWE, PRZESTRZEŃ SPRZĘŻONA.

Rozważamy przestrzeń $V^* := L(V, \mathbb{K})$ funkcji liniowych na V o wartościach w ciele odpowiednim dla V. Przestrzeń ta nazywa się przestrzenią **sprzężoną** albo **dualną** do V. Używa się też rodzimego odpowiednika: przestrzeń **dwoista**.

Elementy V^* czyli liniowe odwzorowanie $\varphi: V \to \mathbb{K}$ nazywane są **formami liniowymi**, **jednoformami**, **funkcjonałami liniowymi** albo **kowektorami**.

Wymiar przestrzeni V^* obliczyć można korzystając z ogólnego wzoru $\dim(L(V,W)) = \dim V \cdot \dim W$. Wymiar $\mathbb{K}$ jako przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$ jest 1, wobec tego $\dim V^* = \dim V$. Przestrzenie V i V^* są izomorficzne jako przestrzenie jednakowego wymiaru jednak żaden z izomorfizmów nie jest wyróżniony jeśli V nie jest wyposażona w żadną dodatkową strukturę algebraiczną.

PRZYKŁADY KOWEKTORÓW NA RÓŻNYCH PRZESTRZENIACH WEKTOROWYCH:

(1) Niech $V = \mathbb{R}_m[\cdot]$, tzn V jest przestrzenią wielomianów stopnie nie większego niż m. Przypominamy, że $\dim V = m+1$. Załóżmy $m > 0$
Niech $x \in \mathbb{R}$

$\varphi_x : V \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi_x(v) = v(x)$ jest kowektorem na V tzn $\varphi_x \in V^*$.

Zauważmy że układ dwóch kowektorów (φ_x, φ_y) jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy $x \neq y$. Istotnie, niech $x \neq y$; sprawdźmy dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ $a\varphi_x + b\varphi_y = 0$. Kowektor jest równy 0 jeśli znika obliczony na wszystkich wektorach. Warunek $a\varphi_x + b\varphi_y = 0$ oznacza wobec tego, że

$$\forall v \in V \quad 0 = (a\varphi_x + b\varphi_y)(v) = a\varphi_x(v) + b\varphi_y(v) = a \cdot v(x) + b\, v(y)$$

Z założenia $m>0$ wynika, że możemy używać wielomianów stopnia pierwszego. Niech więc $v(t) = t - x$ i $u(t) = t - y \longrightarrow 0 = au(x) + bu(y) = a(x-y) \Rightarrow a = 0$.

$\hookrightarrow 0 = av(x) + bv(y) = b(y-x) \Rightarrow b = 0$

Podobnie wykażemy następujący fakt:

FAKT:

Niech $x_0, \dots, x_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy układ kowektorów $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ na $\mathbb{R}_n[\cdot]$ gdzie $\varphi_k(v) = v(x_k)$ jest liniowo niezależny.

DOWÓD:

Poszukujemy współczynników $a_0, \dots, a_n$ takich, żeby $a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n = 0$. Inaczej mówiąc, dla dowolnego wielomianu v stopnia conajwyżej n powinno być

$$0 = a_0\varphi_0(v) + \dots + a_n\varphi_n(v) = a_0 v(x_0) + \dots + a_n v(x_n) \qquad (*)$$

Użyjemy następującego układu wielomianów: $v_0(t) = (t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n)$ inaczej $v_0 = \frac{1}{t-x_0}\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)$. Podobnie tworzymy pozostałe wielomiany

$$v_i = \frac{1}{t-x_i}\prod_{k=1}^{n}(t-x_k).$$

Wielomiany v_i (jest ich $n+1$) mają własność $v_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ (x_j-x_1)(x_j-x_2)\overset{\overset{j}{\Downarrow}}{\cdots}(x_j-x_n) & i=j \end{cases}$

Podstawiając kolejno v_i do $(*)$ otrzymujemy

dla v_0 $\quad a_0(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)=0$, dla v_1 $\quad a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)=0$

dla v_2 $\quad a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)=0$ itd ... dla v_n $\quad a_n(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})=0$

Ponieważ wszystkie liczby x_i są różne to ich różnice $x_i - x_j$ są niezerowe dla $i \neq j$. Wobec tego w każdym równaniu zniknąć musi odpowiedni współczynnik a_i. ■

WNIOSEK Skoro $\dim \mathbb{R}_n[\cdot] = n+1$ i $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ są liniowo niezależne to stanowią bazę przestrzeni $(\mathbb{R}_n[\cdot])^*$

(2) Odwzorowanie $I: \mathbb{R}_n[\cdot] \ni v \longmapsto \int_0^1 v(t)\,dt$ jest kowektorem na $\mathbb{R}_2[\cdot]$. Ciekawa obserwacja: jeśli $I \in (\mathbb{R}_n[\cdot])^*$ to I daje się zapisać w bazie $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$. Innymi słowy całkę z wielomianu stopnia $\leq n$ po odcinku $[0,1]$ można wyrazić poprzez wartości tego wielomianu w $n+1$ punktach. Oczywiście otrzymany „wzór na całkę" będzie dość mało uniwersalny: będzie działał jedynie dla całki po ustalonym

odcinku i tylko dla wielomianów ograniczonego stopnia.

(3) Rozważmy często używaną bazę w $\mathbb{R}_n[\cdot]$: $e=(e_0, e_1, \dots, e_n)$ gdzie $e_k(t)=t^k$
i zdefiniujmy odwzorowanie

$$\psi_k : \mathbb{R}_n[\cdot] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_k(v) = \text{współczynnik przy } e_k \text{ w rozkładzie } v \text{ w bazie } e$$

mniej formalnie: $v(t)=a_0+a_1t+\dots+a_nt^n$, $\quad \psi_k(v)=a_k$.
Nietrudno stwierdzić, że każde ψ_k jest kowektorem oraz, że $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ jest bazą przestrzeni dualnej do $\mathbb{R}_n[\cdot]$.

(4) Niech teraz $V=\mathbb{K}^n$. Wtedy $V^*=L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ = macierze mające jeden wiersz i n kolumn o współczynnikach z $\mathbb{K}$. Takie macierze nazywa się czasami „wektorami wierszowymi". Na oznaczenie $(\mathbb{K}^n)^*$ używać będziemy symbolu
$\mathbb{K}_n$ ← indeks na dole mówi że mamy do czynienia z wierszami a nie kolumnami.
Działanie elementów $\mathbb{K}_n$ na elementy $\mathbb{K}^n$ to oczywiście mnożenie macierzy:

$\mathbb{K}_3 \ni \varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\mathbb{K}^3 \ni v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\qquad \varphi(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7.$

A CO TO JEST $(V^*)^*$?

Przestrzeń V^* jest „uczciwą" przestrzenią wektorową, zatem zasadne jest pytanie czym jest przestrzeń do niej sprzężona.

TWIERDZENIE

Niech V będzie skończeniewymiarową przestrzenią wektorową. Wówczas istnieje kanoniczny izomorfizm

$$(V^*)^* \simeq V$$

Przestrzeń dualna do dualnej jest izomorficzna z wyjściową przestrzenią wektorową.

DOWÓD:

Zauważmy po pierwsze, że istnieje kanoniczne odwzorowanie

$$\iota : V \longrightarrow (V^*)^*$$

$V \ni v$ wektory $\quad V^* \ni \varphi$ kowektory $\quad (V^*)^*$ funkcjonały na kowektorach tzn odwzorowania $V^* \longrightarrow \mathbb{K}$

$\imath : V \longrightarrow (V^*)^*$

Wartość $\imath$ na $v \in V$ jest funkcjonałem na V^* tzn. oblicza się na φ. Żeby powiedzieć co to jest $\imath(v)$ muszę podać jak $\imath(v)$ działa na dowolne $\varphi \in V^*$:

$$\imath(v)(\varphi) := \varphi(v)$$

$\imath(v)$ jest funkcjonałem liniowym: $\imath(v)(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) = \imath(v)(\varphi) + \imath(v)(\psi)$
$\imath(v)(a\varphi) = a\varphi(v) = a \cdot \varphi(v) = a \cdot \imath(v)(\varphi)$. Sprawdziliśmy, że wartości $\imath$ leżą rzeczywiście w $(V^*)^*$

odwzorowanie $\imath$ jest liniowe: istotnie $\imath(v+w)(\varphi) = \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \imath(v)(\varphi) + \imath(w)(\varphi) = (\imath(v) + \imath(w))(\varphi)$ Równość zachodzi dla dowolnego φ, wobec tego $\imath(v+w) = \imath(v) + \imath(w)$. Podobnie $\imath(\lambda v)(\varphi) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda \imath(v)(\varphi)$.
Z dowolności φ $\imath(\lambda v) = \lambda \imath(v)$.

Sprawdziliśmy, że $\imath : V \longrightarrow (V^*)^*$ jest odwzorowaniem liniowym. Pozostało do sprawdzenia czy jest izomorfizmem. Wobec identyczności wymiarów V i $(V^*)^*$ wystarczy sprawdzić np. injektywność. Badamy zatem $\ker \imath$:

$\ker \imath = \{ v \in V : \imath(v) = 0 \}$ $\quad \imath(v) = 0 \iff \forall \varphi \in V^* \; \imath(v)(\varphi) = 0 \quad \imath(v)(\varphi) = \varphi(v)$, tzn $\imath(v) = 0 \iff \forall \varphi \; \varphi(v) = 0$. Wszystkie kowektory znikają jedynie na wektorze zerowym zatem istotnie otrzymujemy $\ker \imath = \{0\}$. ∎

WNIOSEK $(V^*)^*$ nie jest nową przestrzenią wektorową. Będziemy zawsze utożsamiać ją z V.

UWAGA: Równość $(V^*)^* = V$ zachodzi dla przestrzeni skończenie wymiarowych. W wymiarze nieskończonym odwzorowanie typu $\imath$ też istnieje i jest injektywne, nie musi jednak być surjektywne. Ogólnie więc mamy jedynie $V \subset (V^*)^*$.

NOTACJA: Jak pokazuje powyższe twierdzenie w parze V, V^* obie przestrzenie odgrywają podobną rolę. V^* jest dualna do V i V jest dualna do V^*. Używa się wobec tego często notacji nie wyróżniającej żadnej z tych przestrzeni.

Niech $v \in V$ i $\varphi \in V^*$. Dotychczas pisaliśmy $\varphi(v)$ na oznaczenie wartości kowektora φ na wektorze v. Teraz będziemy pisać $\langle \varphi, v \rangle$. Liniowe własności zapisują się wobec tego jako:

$$\langle a\varphi + b\psi, v \rangle = a\langle \varphi, v \rangle + b\langle \psi, v \rangle, \quad \langle \varphi, av + bw \rangle = a\langle \varphi, v \rangle + b\langle \varphi, w \rangle$$

W mechanice kwantowej w której algebra liniowa jest podstawą matematycznego opisu teorii stosuje się podobną notację. Wektory reprezentujące stan kwantowy układu zapisuje się jako $|v\rangle$ i nazywa „ket" a funkcjonał liniowy jako $\langle \varphi|$ i nazywa „bra". Działanie jednego na drugi to $\langle \varphi | v \rangle$ „bracket". Dodatkowym elementem jest tutaj iloczyn skalarny, który definiuje izomorfizm między przestrzenią wektorową a do niej dualną. Wiadomo wówczas jaki kowektor odpowiada jakiemu wektorowi. Kowektor ten oznacza się także odpowiednim bra $\langle v|$. Wtedy bracket $\langle v|w\rangle$ to jednocześnie iloczyn skalarny wektorów v i w oraz działanie funkcjonału odpowiadającego v na wektor w.

POJĘCIE BAZY DUALNEJ:

Niech V i V^* będą parą przestrzeni dualnych. Mając w jednej z nich wybraną bazę można w sposób jednoznaczny zdefiniować bazę w drugiej.
Niech np. $e = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą w V. Zdefiniujemy układ kowektorów $\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)$ warunkami

$$\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad (**)$$

Warunki te zadają układ ε w sposób jednoznaczny. Istotnie, ustalmy $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Kowektor ε^k jest dobrze zdefiniowany jeśli potrafimy obliczyć go na dowolnym wektorze $v \in V$. Warunki $(**)$ zapewniają, że potrafimy:

$$\langle \varepsilon^k, v\rangle = \langle \varepsilon^k, v^1 e_1 + v^2 e_2 + \dots + v^n e_n\rangle = v^1\langle \varepsilon^k, e_1\rangle + v^2\langle \varepsilon^k, v_2\rangle + \dots + v^n\langle \varepsilon^k, e_m\rangle =$$

$$= v^k\langle \varepsilon^k, v_k\rangle = v^k$$

k-ty wektor układu ε obliczony na v „zwraca" współrzędną przy k-tym wektorze bazowym. to pokazuje jednocześnie, że kowektory (ε^i) są dobrze zdefiniowane (wiadomo jak je liczyć) oraz że są liniowo niezależne. Liniową niezależność sprawdzamy obliczając kombinację liniową $a_1\varepsilon^1 + \dots + a_n\varepsilon^n$ kolejno na wektorach e_i i przyrównując wynik do zera. Otrzymujemy warunki $\forall i\ a_i = 0$.

PRZYKŁAD: Bazą dualną do bazy kanonicznej w $\mathbb{K}^n$ jest wierszowa baza kanoniczne, tzn układ kowektorów:

$$\underset{\varepsilon^1}{[1\,0\,0\dots 0]},\ \underset{\varepsilon^2}{[0\,1\,0\dots 0]},\ \underset{\varepsilon^3}{[0\,0\,1\,..\,0]},\ \dots,\ \underset{\varepsilon^m}{[0\,0\,0\dots 1]}.$$

PRZYKŁAD RACHUNKOWY:

(1) Znaleźć bazę φ w $\mathbb{R}_2$ dualną do bazy $f = \left(f_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ f_2 = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right)$ w $\mathbb{R}_2$.

(2) Definiujemy dwa odwzorowania $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2$ $x = \begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix} = x^1e_1 + x^2e_2 \longmapsto x^1\varepsilon^1 + x^2\varepsilon^2$
oraz $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2$
$x = a^1f_1 + a^2f_2 \longmapsto a^1\varphi^1 + a^2\varphi^2$ Czy E i F są identyczne, czy różne? (e_1, e_2 to wektory bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^2$, odpowiednio $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ w $\mathbb{R}_2$)

ROZWIĄZANIE: (1) φ^1 spełnia $\langle\varphi^1, f_1\rangle = 1$, $\langle\varphi^1, f_2\rangle = 0$ mamy więc

$\varphi^1 = [a, b]$
$$[a\ b]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1 \quad [a\ b]\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases}a+b=1\\a-2b=0\end{cases} \quad a = \frac{2}{3}\quad b = \frac{1}{3}\quad \varphi^1 = \left[\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right]$$

$$\varphi^2 = [c\ d] \quad [c\ d]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 0 \quad [c\ d]\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases}c+d=0\\c-2d=1\end{cases} \quad \begin{matrix}c = \frac{1}{3}\\ d = -\frac{1}{3}\end{matrix} \quad \varphi^2 = \left[\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\right]$$

Inaczej: Obserwujemy że macierz, której wierszami są φ^1 i φ^2 musi być odwrotna do macierzy, której kolumnami są f_1 i f_2:

tzn φ^1, φ^2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\varphi^1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad\varphi^2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ baza dualna znaleziona.

(2) Odwzorowanie E to po prostu transpozycja: $E\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix}$

a co z F?

Zapiszmy wektor $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$ w bazie f

$$[x]^f = [id]^f_e\,[x]^e = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2x^1 + x^2 \\ x^1 - x^2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} \varphi^1(x) \\ \varphi^2(x) \end{bmatrix}$$

?

$$[id]^f_e = \left([id]^e_f\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zaobserwowaliśmy już wcześniej związek między bazą dualną a współrzędnymi

$$F(x) = \varphi^1(x)\cdot\varphi^1 + \varphi^2(x)\varphi^2 = \varphi^1(x)\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} + \varphi^2(x)\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}(2x^1 + x^2)\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{9}(x^1 - x^2)\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4x^1 + 2x^2 + x^1 - x^2, & (2x^1 + x^2) - (x^1 - x^2) \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5x^1 + x^2 & x^1 + 2x^2 \end{bmatrix}$$

Porównujemy: $F(x) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5x^1 + x^2 & x^1 + 2x^2 \end{bmatrix}$

$E(x) = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix}$

Odwzorowanie E i F są różne. Pojęcie bazy dualnej nie pomaga więc w znalezieniu izomorfizmu V i V* użycie różnych baz prowadzi do różnych odwzorowań.

UWAGA! KATASTROFA!

Pojęcie bazy dualnej i przestrzeni dualnej pozwalają nam sprawdzić czy naprawdę rozumiemy takie rzeczy jak bazy, współrzędne itd. Weźmy następujący przykład: Niech $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$. Użyjmy naturalnej bazy $e = (e_0, e_1, e_2)$ $e_0(t) = 1$ $e_1(t) = t$ $e_2(t) = t^2$. Bazę dualną w V^* stanowią wtedy trzy kowektory $\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)$ zdefiniowane wzorami:

$$\langle \varepsilon^1, v \rangle = v(0) \qquad \langle \varepsilon^2, v \rangle = v'(0) \qquad \langle \varepsilon^3, v \rangle = \tfrac{1}{2} v''(0)$$

Weźmy kowektor $\varphi \in V^*$ dany wzorem $\langle \varphi, v \rangle = v(1)$. Wtedy

$$[\varphi]^1_e = [1 \quad 1 \quad 1]$$

(jedynka na górze w $[\varphi]^1_e$ oznacza bazę kanoniczną w $\mathbb{R}$, tzn. bazę składającą się z jednego wektora będącego liczbą 1)

$$[\varphi]^\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kto rozumie te mistyczne napisy przechodzi na następny poziom ;)

ODWZOROWANIE SPRZĘŻONE:

Rozważmy teraz dwie przestrzenie wektorowe V i W oraz ustalmy odwzorowanie liniowe $F: V \to W$

Odwzorowaniem sprzężonym do F nazywamy odwzorowanie

$$F^*: W^* \to V^* \text{ dane warunkiem } \forall\, v \in V, \alpha \in W^* \quad \langle \alpha, F(v) \rangle = \langle F^*(\alpha), v \rangle$$

Proszę zwrócić uwagę na kierunki działania:

$$F: V \longrightarrow W$$
$$F^*\quad V^* \longleftarrow W^*$$

Operacja sprzężenia odwzorowania ma następujące własności:

(1) $F: V \longrightarrow W \quad G: W \longrightarrow \mathcal{U} \qquad (G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

Istotnie: dla $v \in V$ i $\varphi \in \mathcal{U}^*$ mamy

$$\langle \varphi, \underbrace{G \circ F}(v) \rangle = \langle G^*(\varphi), F(v) \rangle = \langle \underbrace{F^* \circ G^*}(\varphi), v \rangle$$

(2) $F_1: V \longrightarrow W$, $F_2: V \longrightarrow W \qquad (\lambda F_1 + \beta F_2)^* = \lambda F_1^* + \beta F_2^*$ (oczywiste)

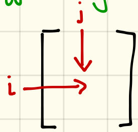
(3) Niech e, f oznaczają bazy w V i W odpowiednio, a ε i φ bazy w V^* i W^* dualne do e i f, odpowiednio. Wtedy

$$[F^*]^{\varepsilon}_{\varphi} = \left([F]^f_e\right)^T$$

Macierz odwzorowania sprzężonego jest transpozycją macierzy odwzorowania wyjściowego.

Sprawdźmy to:

jak wygląda element $F^i{}_j$ macierzy $[F]^f_e$? jest to i-ta współrzędna wektora $F(e_j)$ względem bazy f. Współrzędną tę możemy wyliczyć stosując φ^i do $F(e_j)$ tzn



i-ty wiersz
j-ta kolumna

$$F^i{}_j = \langle \varphi^i, F(e_j) \rangle$$

jak zatem wyliczyć element $(F^*)^j{}_i$ macierzy odwzorowania sprzężonego? jest to j-ta współrzędna kowektora $F^*(\varphi_i)$ względem bazy ε. Współrzędną tę można obliczyć stosując e_j do $F^*(\varphi_i)$ tzn

$$(F^*)^j{}_i = \langle F^*(\varphi_i), e_j \rangle$$

Porównujemy:

$$(F^*)^j{}_i = \langle F^*(\varphi_i), e_j \rangle = \langle \varphi_i, F(e_j) \rangle = F^i{}_j$$

zamienione indeksy górny i dolny wskazują na transpozycję.

ANIHILATOR PODPRZESTRZENI:

Niech V będzie przestrzenią wektorową a $W \subset V$ podprzestrzenią. Definiujemy anihilator podprzestrzeni W jako podzbiór W^* dany warunkiem

$$W^\circ = \{\alpha \in V^* : \forall w \in W \ \langle \alpha, w \rangle = 0\}$$

anihilator podprzestrzeni W to zbiór wszystkich kowektorów znikających na tej podprzestrzeni.

FAKT

W° jest podprzestrzenią wektorową w V^* (oczywiste)

PRZYKŁAD:

$V = \mathbb{R}^3$ $\quad W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ Znaleźć $W^\circ \subset \mathbb{R}$. Anihilator podprzestrzeni W składa się ze wszystkich kowektorów $[a \ b \ c]$ takich, że $[a \ b \ c] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, tzn

$$a + 2b + c = 0 \Rightarrow a = -2b - c \Rightarrow W^\circ \ni \varphi = [-2b - c \quad b \quad c] =$$

$$= b[-2 \quad 1 \quad 0] + c[-1 \quad 0 \quad 1]$$

$$W^\circ = \langle [-2 \ 1 \ 0], [-1 \ 0 \ 1] \rangle$$

FAKT Własności anihilatora:

(1) $W \subset V$ $\quad \dim W^\circ = \dim V - \dim W$

(2) $W, U \subset V$ $\quad (W + U)^\circ = W^\circ \cap U^\circ$

$\quad (W \cap U)^\circ = W^\circ + U^\circ$ $\qquad (W^\circ)^\circ = W$

DOWÓD: (1) jest oczywiste – rozwiązywanie układów równań!

(2) Zacznijmy od $U^\circ \cap W^\circ = (U+W)^\circ$ $(*{*}*)$

Niech $\alpha \in U^\circ \cap W^\circ$. Obliczmy α na wektorze postaci $u+w$, $u \in U$, $w \in W$:

$\langle \alpha, u+w \rangle = \langle \alpha, u \rangle + \langle \alpha, w \rangle = 0$ bo $\alpha \in U^\circ$ i $\alpha \in W^\circ$

Niech teraz $\beta \in (U+W)^\circ$. Oznacza to, że β znika na wektorach postaci $u+w$. W szczególności znika na wektorach postaci $u+0$ (zatem $\beta \in U^\circ$) i na wektorach postaci $0+w$ (czyli $\beta \in W^\circ$). Ostatecznie $\beta \in U^\circ \cap W^\circ$

Teraz $(W^\circ)^\circ = W$. Rachunek wymiarów pokazuje że $\dim (W^\circ)^\circ = \dim W$. Ponadto gdy $w \in W$ i $\alpha \in W^\circ$ to $\langle \alpha, w \rangle = 0$ zatem $w \in (W^\circ)^\circ$. Zawieranie i zgodność wymiarów dają równość

Zapiszmy $(*{*}*)$ dla U° i W° zamiast U i V: $(U^\circ)^\circ \cap (W^\circ)^\circ = (U^\circ + W^\circ)^\circ$
otrzymamy

$$U \cap W = (U^\circ + W^\circ)^\circ$$

Identyczne podprzestrzenie mają identyczne anihilatory więc

$$(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ .$$

ZADANIA NA ĆWICZENIA

ZADANIE 1. Wielomiany interpolacyjne Lagrange'a: Znaleźć bazę w $\mathbb{R}_2[\cdot]$ dualną do bazy φ w $(\mathbb{R}_2[\cdot])^*$ gdzie $\varphi^1(v) = v(1)$ $\varphi^2(v) = v(2)$ $\varphi^3(v) = v(3)$. Korzystając z wyznaczonej bazy znaleźć wielomian kwadratowy przyjmujący wartości $-1, 1, 2$ w punktach $1, 2, 3$ odpowiednio. Zapisać wzory na współczynniki wielomianu kwadratowego przyjmującego wartości y_1, y_2, y_3 w punktach $1, 2, 3$.

ZADANIE 2. Znaleźć współrzędne funkcjonału liniowego $w \longmapsto \int_{-1}^{1} w(t)\,dt$ określonego na $\mathbb{R}_2[\cdot]$ w bazie składającej się z kowektorów $(\varphi_-, \varphi_0, \varphi_+)$ gdzie $\varphi_-(v) = v(-1)$, $\varphi_0(v) = v(0)$, $\varphi_+(v) = v(1)$.

ZADANIE 3. W przestrzeni $\mathbb{R}_3[\cdot]$ wybrano bazę $e = (e_0, e_1, e_2, e_3)$, gdzie $e_k(t) = \frac{1}{k!} t^k$. Znaleźć bazę dualną.

ZADANIE 4

Niech $V = \mathbb{R}_3[\cdot]$. Definiujemy kowektory $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ wzorem $\varphi_k(v) = v^{(k)}(-4)$, gdzie $v^{(k)}$ oznacza pochodną rzędu k. Niech także $F \in L(V, V)$ $F(v) = v'$ oraz $\psi \in V^*$ $\psi(v) = v(7)$.

Przedstawić formę $F^*(\psi)$ jako kombinację liniową form $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

ZADANIE 5. Znaleźć w $\mathbb{R}_3$ bazę dualną do bazy w $\mathbb{R}^3$ składającej się z wektorów $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

ZADANIE 6: W przestrzeni $(\mathbb{R}_2[\cdot])^*$ znaleźć anihilator podprzestrzeni rozpiętej przez $v(t) = t^2 - t$ i $u(t) = t - 1$.

ZADANIE 7: Niech $v \in V$ i $\varphi \in V^*$. Definiujemy odwzorowanie $v \otimes \varphi : V \longrightarrow V$
$(v \otimes \varphi)(w) = \langle \varphi, w \rangle v$. Znaleźć macierz $v \otimes \varphi$ dla $v \in \mathbb{R}^3$ $\varphi \in \mathbb{R}_3$

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\varphi = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$