FORMY DWULINIOWE, DWULINIOWE SYMETRYCZNE, KWADRATOWE.

Przechodzimy do form dwuliniowych, tzn odwzorowań $Q: V\times V \to \mathbb{R}$ liniowych ze względu na każdy argument. W jednym z poprzednich wykładów wymienialiśmy przykłady tego rodzaju odwzorowań. Przypomnijmy je tutaj:

(1) iloczyn skalarny: używany na zajęciach z fizyki iloczyn skalarny wektorów z $\mathbb{R}^3$ dany wzorem

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

jest formą dwuliniową dodatkowo wiadomo o nim że jest symetryczny do pozostałych własności wrócimy później.

(2) druga pochodna funkcji wielu zmiennych jest to macierz, której wyrazami są drugie pochodne cząstkowe funkcji f. Na pozycji (i,j) stoi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$. Przy spełnieniu odpowiednich warunków (o czym będzie na analizie) drugie pochodne cząstkowe są symetryczne, nie musimy więc precyzować, który indeks oznacza wiersz a który kolumnę. Symetryczna macierz oznacza symetryczną formę.

(3) metryka Minkowskiego w szczególnej teorii względności pochodzi od formy dwuliniowej symetrycznej $\eta: V\times V \to \mathbb{R}$, określonej na czterowymiarowej przestrzeni wektorowej. Od „zwykłego" iloczynu skalarnego różni się tym, że „kwadrat długości wektora" wyznaczony z tej formy, czyli $\eta(v,v)$ nie zawsze jest dodatni. Np wektory styczne do trajektorii promieni świetlnych mają „długość" równą zero, choć same są niezerowe. Są wektory o „długości" dodatniej (styczne do linii świata) i ujemnej.

(4) Związek między energią kinetyczną w ruchu obrotowym bryły sztywnej a prędkością kątową ma postać $E = \frac{I_{(p,\bar{n})}\,\omega^2}{2}$. We wzorze tym ω jest wartością prędkości kątowej zaś wielkość $I_{(\bar{n},p)}$ to moment bezwładności bryły względem osi obrotu przechodzącej przez punkt p i mającej wektor kierunkowy $\bar{n}$. Moment bezwładności charakteryzuje rozkład masy wewnątrz bryły. Okazuje się, że zależność od kierunku osi obrotu, a więc i od prędkości kątowej ma postać formy dwuliniowej symetrycznej nazywanej tensorem bezwładności

$$E = \frac{1}{2} I_p(\bar{\omega},\bar{\omega})$$

obliczonej na $\bar{\omega}$ w obu miejscach na argumenty.

PRZYPOMNIENIA: przy okazji ogólnorozwojowego wstępu do wykładu o wyznaczniku powiedziane było, że (1) zbiór wszystkich form dwuliniowych na przestrzeni wektorowej V wymiaru n jest przestrzenią wektorową z działaniami jak zwykle dla przestrzeni odwzorowań i wymiaru n^2. (2) zbiory form odpowiednio symetrycznych i antysymetrycznych są podprzestrzeniami wektorowymi wymiarów $n(n+1)/2$ dla symetrycznych i $n(n-1)/2$ dla antysymetrycznych. (3) Obserwując, że jednocześnie symetryczna i antysymetryczna jest jedynie forma zerowa oraz że suma wymiarów $n(n-1)/2 + n(n+1)/2 = \frac{n}{2}(n-1+n+1) = n^2$ stwierdzamy, że przestrzeń form dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni form dwuliniowych symetrycznych i antysymetrycznych. Rozkład na składowe ma postać:

$$Q = Q_+ + Q_- \quad : \quad Q_+(v,w) = \frac{1}{2}\big(Q(v,w)+Q(w,v)\big), \quad Q_-(v,w) = \frac{1}{2}\big(Q(v,w)-Q(w,v)\big).$$

MACIERZ FORMY DWULINIOWEJ:

Niech $e=(e_1,\dots,e_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Niech także $Q: V\times V \to \mathbb{K}$ będzie formą dwuliniową na V. Liniowość ze względu na oba argumenty pozwala zdefiniować formę poprzez podanie jej wartości na wektorach bazowych. Istotnie:

$$v = \sum_i v^i e_i, \quad w = \sum_i w^i e_i \qquad Q(v,w) = Q\Big(\sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j\Big) = \sum_i v^i Q\Big(e_i, \sum_j w^j e_j\Big)$$

$$= \sum_i \sum_j v^i w^j \, Q(e_i, e_j).$$

Liczby $Q_{ij} = Q(e_i, e_j)$ jednoznacznie określają formę Q. Liczby te potraktować można jako wyrazy macierzowe macierzy $n\times n$. Pierwszy indeks numeruje wiersze a drugi kolumny. Macierz tak zbudowaną oznaczać będziemy $[Q]_e$. Działanie Q na wektory v,w we współrzędnych zapisać można jako

$$Q(v,w) = \left([v]^e\right)^T [Q]_e \, [w]^e$$

Zwróćmy uwagę na różnicę między macierzą odwzorowania $V \to V$ a macierz formy dwuliniowej. Obie wyglądają jednakowo, tzn jak tabelka liczb $m\times n$ ale działają inaczej. Porównajmy:

$F: V \longrightarrow V$

$[F(v)]^e = [F]^e_e [v]^e$

$[F]^g_g = \boxed{[id]^g_e [F]^e_e [id]^e_g}$

$Q: V\times V \longrightarrow \mathbb{K}$

$Q(v,w) = ([v]^e)^T [Q]_e [w]^e$

jak zamienić bazę w macierzy formy dwuliniowej?

$[v]^g = [id]^g_e [v]^e \qquad [w]^g = [id]^g_e [w]^e$

$$Q(v,w) = ([v]^g)^T [Q]_g [w]^g = \left([id]^g_e [v]^e\right)^T [Q]_g \left([id]^g_e [w]^e\right) =$$

$$= ([v]^e)^T \left([id]^g_e\right)^T [Q]_g [id]^g_e [w]^e$$

$$[Q]_g = \boxed{\left([id]^g_e\right)^T} [Q]_e [id]^g_e$$

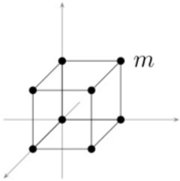
Zwracamy uwagę na różnicę w prawie transformacji między bazami dla odwzorowań i form. Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{U}$ macierz przejścia $\mathcal{U} = [id]^e_g$ to

$$[F]^g_g = \mathcal{U}^{-1} [F]^e_e\, \mathcal{U} \qquad\qquad [Q]_g = \mathcal{U}^T [Q]_e\, \mathcal{U}$$

Macierze „wyglądają" jednakowo ale działają i transformują się inaczej.

MACIERZ FORMY W DZIAŁANIU:

Przykład 4. Rozważamy bryłę sztywną B składającą się z ośmiu jednakowych mas m umieszczonych w wierzchołkach sześcianu rozpiętego na wektorach bazy standardowej w $\mathbb{R}^3$.



Wyrazy macierzowe momentu bezwładności wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$I_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{8} m\left[(x_\alpha^1)^2 + (x_\alpha^3)^2 + (x_\alpha^3)^2 - (x_\alpha^i)^2\right], \quad I_{ij} = -\sum_{\alpha=1}^{8} m x_\alpha^i x_\alpha^j \quad \text{dla} \quad i \neq j,$$

gdzie α numeruje wierzchołki sześcianu. Łatwo sprawdzić, że

$$I = m\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z macierzy $[I]_e$ obliczyć możemy moment bezwładności w obrocie względem dowolnej osi przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Na przykład względem osi, której wektorem kierunkowym jest

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad I_{\overrightarrow{n}} = m\frac{1}{3}[1 \ \ 1 \ \ 1]\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = m\frac{1}{3}[1 \ \ 1 \ \ 1]\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4m$$

Przykład 6. Na przestrzeni $\mathbb{R}_2[\cdot]$ wielomianów stopnia nie większego niż 2 rozważmy teraz formę dwuliniową daną wzorem

$$Q(v,w) = 6\int_0^1 v'(t)w(t)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Użyjemy bazy standardowej do zapisania macierzy tej formy:

$$e_1(t) = 1, \qquad e_2(t) = t, \qquad e_3(t) = t^2.$$

Wyznaczamy wyrazy macierzowe: na przykład

$$Q(e_3,e_2) = 6\int_0^1 e_3'(t)e_2(t) = 6\int_0^1 (2t)(t)\mathrm{d}t = 6\int_0^1 2t^2\mathrm{d}t = 6\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = 4.$$

Podobnie:

$$\begin{aligned} &Q(e_1,e_1)=0, \quad Q(e_1,e_2)=3, \quad Q(e_1,e_3)=2,\\ &Q(e_2,e_1)=6, \quad Q(e_2,e_2)=2, \quad Q(e_2,e_3)=2,\\ &Q(e_3,e_1)=6, \quad Q(e_3,e_2)=4, \quad Q(e_3,e_3)=3. \end{aligned}$$

Macierz tej formy ma więc postać

$$[Q]_e = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Używając współrzędnych (c,b,a) związanych z bazą e, tzn takich, że

$$v(t) = at^2 + bt + c = ae_3(t) + be_2(t) + ce_1(t), \qquad [v]^e = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix},$$

możemy zapisać

$$Q(v,w) = [c_v \;\; b_v \;\; a_v]\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_w \\ b_w \\ a_w \end{bmatrix} = [c_v \;\; b_v \;\; a_v]\begin{bmatrix} 3b_w + 2a_w \\ 6c_w + 2b_w + 2a_w \\ 6c_w + 4b_w + 3a_w \end{bmatrix} = \tag{6}$$

$$3c_vb_w + 2c_va_w + 6b_vc_w + 2b_vb_w + 2b_va_w + 6a_vc_w + 4a_vb_w + 3a_va_w.$$

Powyższe wzory (4), (5), (6) przedstawiają *trzy sposoby opisania tej samej formy dwuliniowej*: przy pomocy abstrakcyjnego wzoru (4), przy pomocy macierzy w wybranej bazie (5), przy pomocy wzoru z użyciem współrzędnych (6). ♣

FORMY DWULINIOWE SYMETRYCZNE, FORMY KWADRATOWE

W dalszym ciągu wykładu zajmować się będziemy formami dwuliniowymi symetrycznymi, tzn spełniającymi warunek $Q(v,w)=Q(w,v)$ dla dowolnych $v,w \in V$. Łatwo zauważyć, że macierz formy symetrycznej jest symetryczna tzn $Q_{ij} = Q(e_i,e_j) = Q(e_j,e_i) = Q_{ji}$.

W wielu dotychczasowych przykładach widzieliśmy, że forma dwuliniowa aplikowana jest często dwa razy do tego samego wektora: kwadrat długości wektora liczymy jako $(v|v)$, moment bezwładności względem konkretnej osi jako $I(\vec{n},\vec{n})$ czy w końcu drugą pochodną funkcji wielu zmiennych na przyroście h liczymy $f''(x)(h,h)$. Przykłady uzasadniają wprowadzenie dodatkowego pojęcia.

Formą kwadratową na przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie pochodzące od formy dwuliniowej symetrycznej Q dane wzorem

$$q(v)=Q(v,v)$$

Nazwę uzasadnia następujący rachunek:

$$q(\lambda v)=Q(\lambda v,\lambda v)=\lambda^2 Q(v,v)=\lambda^2 q(v)$$

Jest jasne, z definicji, że każda forma dwuliniowa symetryczna definiuje formę kwadratową. Okazuje się że jest też odwrotnie, tzn znając formę kwadratową możemy odtworzyć formę dwuliniową od której ona pochodzi. Zadanie polega zatem na wyrażeniu $Q(v,w)$ poprzez własności q

$$q(v+w)=Q(v+w,v+w)=Q(v,v)+\underline{Q(v,w)+Q(w,v)}+Q(w,w)=q(v)+$$
$$+\underline{2Q(v,w)}+q(w)$$

$$Q(v,w)=\frac{1}{2}\Big(q(v+w)-q(v)-q(w)\Big)\longleftarrow$$ formuła polaryzacyjna

OBSERWACJA: Dla dowolnej, niekoniecznie symetrycznej formy Q można napisać $q(v)=Q(v,v)$. Pamiętając o rozkładzie przestrzeni form biliniowych na sumę prostą mamy

$$q(v)=Q(v,v)=Q_+(v,v)+Q_-(v,v)=Q_+(v,v)$$

gdzie $Q_+(v,w)=\frac{1}{2}\left[Q(v,w)+Q(w,v)\right]$

W definicji formy kwadratowej uczestniczy więc tylko część symetryczna formy. Część ta pojawia się w rachunku zmierzającym do wyprowadzenia formuły polaryzacyjnej.

Jak wygląda forma kwadratowa zapisana we współrzędnych względem bazy e w V?

Niech $e=(e_1,\dots,e_n)$ będzie bazą, oznaczmy przez (λ^i) odpowiednie współrzędne, tzn. $v=\lambda^1 e_1+\dots+\lambda^n e_n$

$$[v]^e=\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \vdots\\ \lambda^n\end{bmatrix} \qquad \left([v]^e\right)^T=[\lambda^1\ \lambda^2 \dots \lambda^n] \qquad Q_{ij}=Q(e_i,e_j)$$

$$q(v)=Q(v,v)=\left([v]^e\right)^T[Q]_e[v]^e=[\lambda^1\ \lambda^2\dots\lambda^n]\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \dots & Q_{1n}\\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \dots & Q_{2n}\\ \vdots & & & & \\ Q_{n1} & Q_{n2} & Q_{n3} & \dots & Q_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^n\end{bmatrix}$$

$$=[\lambda^1\ \lambda^2\dots\lambda^n]\begin{bmatrix}\sum_i Q_{1i}\lambda^i\\ \vdots\\ \sum_i Q_{ni}\lambda^i\end{bmatrix}=\sum_{i,j}Q_{ji}\lambda^j\lambda^i=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}\lambda_k^2+\sum_{i\neq j}Q_{ij}\lambda^i\lambda^j=\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}\lambda_k^2+2\cdot\sum_{i<j}Q_{ij}\lambda^i\lambda^j$$

Przykład 7. Forma kwadratowa odpowiadająca tensorowi bezwładności z przykładu (4) we współrzędnych (x^1,x^2,x^3) związanych z bazą kanoniczną ma postać:

$$\imath(x^1,x^2,x^3)=m[x^1\ \ x^2\ \ x^2\ ]\begin{bmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 8 & -2\\ -2 & -2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{bmatrix}=$$

$$m\left(8(x^1)^2+8(x^2)^2+8(x^3)^2-4x^1x^2-4x^2x^3-4x^1x^3\right).$$

♣

Diagonalizacja. Niech Q będzie formą dwuliniową symetryczną na przestrzeni V. Mówimy, że baza e *diagonalizuje* formę Q jeśli macierz $[Q]_e$ jest macierzą diagonalną. 8

Twierdzenie 1 (Lagrange)**.** *Każda forma dwuliniowa symetryczna ma bazę diagonalizującą.*

Szkic dowodu: Dowód twierdzenia (1) jest konstruktywny, to znaczy polega na skonstruowaniu przykładowej bazy diagonalizującej. W tym kontekście wygodniej jest pracować z formą kwadratową zamiast z formą dwuliniową. Zacznijmy od konkretnego przykładu - rozważmy formę $\imath$ z przykładu (7). (dla wygody przyjmijmy $m = 1$):

$$\imath(x^1, x^2, x^3) = 8(x^1)^2 + 8(x^2)^2 + 8(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3 - 4x^1x^3.$$

Spróbujemy doprowadzić formę $\imath$ do takiej postaci, aby we wzorze występowały tylko wyrazy kwadratowe, bez mieszanych:

$$\begin{aligned}\imath(x^1, x^2, x^3) &= 8(x^1)^2 + 8(x^2)^2 + 8(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 4x^2x^3 - 4x^1x^3 = \\ &8(x^1)^2 - 4x^1(x^2 + x^3) + 8(x^2)^2 + 8(x^3)^2 - 4x^2x^3 = \\ &8\left[(x^1)^2 - \frac{1}{2}x^1(x^2 + x^3)\right] + 8(x^2)^2 + 8(x^3)^2 - 4x^2x^3\end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadatowym traktujemy jak początek rozwinięcia pełnego kwadratu:

$$\begin{aligned}&8\left[(x^1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3)^2 - \frac{1}{16}(x^2 + x^3)^2\right] + 8(x^2)^2 + 8(x^3)^2 - 4x^2x^3 = \\ &8(x^1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + x^3)^2 + 8(x^2)^2 + 8(x^3)^2 - 4x^2x^3 = \\ &8(x^1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3)^2 + \frac{1}{2}\left(-(x^2 + x^3)^2 + 16(x^2)^2 + 16(x^3)^2 - 8x^2x^3\right)\end{aligned}$$

Zauważmy, że część zaznaczona na czerwono nie zawiera w ogóle współrzędnej x^1. Po uporządkowaniu możemy „poddać ją" takiej samej operacji sprowadzania do pełnych kwadratów. Dla ułatwienia rachunków zajmiemy się na razie tylko częścią czerwoną:

$$\begin{aligned}&-(x^2 + x^3)^2 + 16(x^2)^2 + 16(x^3)^2 - 8x^2x^3 = \\ &-(x^2)^2 - 2x^2x^3 - (x^3)^2 + 16(x^2)^2 + 16(x^3)^2 - 8x^2x^3 = \\ &15(x^2)^2 + 15(x^3)^2 - 10x^2x^3 = 15\left[(x^2)^2 - \frac{2}{3}x^2x^3\right] + 15(x^3)^2 = \\ &15\left[(x^2 + \frac{1}{5}x^3)^2 - \frac{1}{9}(x^3)^2\right] + 15(x^3)^2 = \\ &15(x^2 - \frac{1}{3}x^3)^2 - \frac{5}{3}(x^3)^2 + 15(x^3)^2 = 15(x^2 - \frac{1}{3}x^3)^2 - \frac{40}{3}(x^3)^2\end{aligned}$$

Otrzymany wynik wstawiamy do wyrażenia na $\imath$:

$$\imath(x^1, x^2, x^3) = 8(x^1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3)^2 + \frac{15}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^3)^2 - \frac{20}{3}(x^3)^2.$$

Nowe współrzędne oznaczamy literą α:

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= x^1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \alpha^2 &= x^2 - \frac{1}{3}x^3, \\ \alpha^3 &= x^3.\end{aligned} \tag{9}$$

Jakiej bazie odpowiadają te współrzędne? Na razie jeszcze nie wiemy. Jeśli jednak tę nieznaną bazę oznaczymy literą f, to wiemy, że 9

$$[I]_f = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{bmatrix}.$$

Jak znaleźć wektory bazowe mając odpowiadające im współrzędne? Potrzebna nam będzie zależność odwrotna do (9):

$$\begin{aligned} x^1 &= \alpha^1 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3, \\ x^2 &= \alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3, \\ x^3 &= \alpha^3. \end{aligned} \tag{10}$$

Wektor v, który w bazie e zapisuje się jako

$$v = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$$

można teraz łatwo zapisać w nowej bazie, której odpowiadają współrzędne α:

$$\begin{aligned} v = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = \left(\alpha^1 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3\right) e_1 + \left(\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3\right) e_2 + \alpha^3 e_3 = \\ \alpha_1 e_1 + \alpha^2 \left(\frac{1}{4} e_1 + e_2\right) + \alpha^3 \left(\frac{1}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + e_3\right). \end{aligned}$$

Wektory bazy f to wektory

$$\begin{aligned} f^1 &= e_1 \\ f^2 &= \frac{1}{4} e_1 + e_2, \\ f^3 &= \frac{1}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + e_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Znaleźliśmy jakąś bazę diagonalizującą dla formy I (oraz $\imath$). Oczywiście taka baza nie jest jedyna. Nie będziemy podawać ogólnego przepisu na diagonalizację metodą Lagranża. Z przeprowadzonych dopiero co rachunków na konkretnym przykładzie wynika także algorytm dla dowolnej formy. Pewien problem mogą nam sprawić tylko formy w których nie ma żadnych wyrazów kwadratowych - nie ma więc od czego zacząć algorytmu. W takim przypadku należy wybrać wyraz mieszany $x^i x^j$ i podstawić

$$x^i = \alpha + \beta, \qquad x^j = \alpha - \beta,$$

wtedy

$$x^i x^j = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

i już mamy potrzebne wyrażenia kwadratowe. □

Wspomnieliśmy już, że baza diagonalizująca nie jest wyznaczona jednoznacznie. Współczynniki, które pojawiają się na diagonali macierzy formy też mogą być bardzo różne (zależą oczywiście od bazy). Okazuje się jednak, że jest coś co od wyboru bazy diagonalizującej nie zależy. Mówi o tym następujące twierdzenie

Twierdzenie 2 (Sylvestera o bezwładności form). *Jeśli* $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ *i* $(\beta^1 \ldots, \beta^n)$ *są układami współrzędnych odpowiadających dwum bazom diagonalizującym formę kwadratową* q *i jeśli*

$$q(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = \sum_{k=1}^{n} a_i(\alpha^i)^2, \qquad q(\beta^1, \ldots, \beta^n) = \sum_{k=1}^{n} b_i(\beta^i)^2$$

to w zbiorach

$$A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$$

jest tyle samo współczynników dodatnich, tyle samo ujemnych i tyle samo zerowych.

Dowód: Zauważmy na początku, że wartość bezwzględną współczynników a_i można „wciągnąć" do definicji współrzędnych (i oczywiście tym samym bazy diagonalizującej). Możemy więc założyć, że zbiory A i B składają się z plus i minus jedynek. Współrzędne można też uporządkować tak, aby pierwsze były te ze współczynnikami $+1$, dalej -1 a następnie te, które mają współczynnik zero. Jeśli współrzędne w układzie α wektora v oznaczymy $\alpha^i(v)$, podobnie ze współrzędnymi β, to forma kwadratowa q we współrzędnych odpowiadających obu bazom ma postać:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p_\alpha}(\alpha^i(v))^2 - \sum_{i=1}^{r_\alpha}(\alpha^{p_\alpha+i}(v))^2 = \sum_{i=1}^{p_\beta}(\beta^i(v))^2 - \sum_{i=1}^{r_\beta}(\beta^{p_\beta+i}(v))^2.$$

Naszym zadaniem jest pokazać, że $p_\alpha = p_\beta$ i $r_\alpha = r_\beta$. Jasne jest, że $p_\alpha + r_\alpha = p_\beta + r_\beta$. Jeśli jądrem q nazwiemy podprzestrzeń zdefiniowaną warunkiem

$$\ker q = \ker Q = \{v \in V : \ \forall w \in V \ Q(v, w) = 0\},$$

to

$$p_\alpha + r_\alpha = p_\beta + r_\beta = n - \dim\ker q.$$

Załóżmy teraz, że $p_\beta < p_\alpha$, tzn.

$$p_\beta - p_\alpha < 0 \quad \Longrightarrow \quad n + p_\beta - p_\alpha < n$$

Warunki

$$\beta^i(v) = 0 \ \text{ dla } \ i = 1, \ldots, p_\beta, \qquad \alpha^j(v) = 0 \ \text{ dla } \ j = p_\alpha + 1, \ldots, n \tag{12}$$

zapisane w jednym z układów współrzędnych (α lub β) przyjmą postać układu równań liniowych, który składa się z mniej niż n równań. Ma więc niezerowe rozwiązanie (układ równań liniowych, jednorodny, liczba równań mniejsza od wymiaru przestrzeni). Oznaczmy to rozwiązanie v_0. Wartość formy na wektorze v_0 w układzie współrzędnych α to:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p_\alpha}(\alpha^i(v_0))^2 - \sum_{i=1}^{r_\alpha}(\alpha^{p_\alpha+i}(v_0))^2 = \sum_{i=1}^{p_\alpha}(\alpha^i(v_0))^2 \geqslant 0 \tag{13}$$

A wartość formy na wektorze v_0 w układzie współrzędnych α to:

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p_\beta}(\beta^i(v))^2 - \sum_{i=1}^{r_\beta}(\beta^{p_\beta+i}(v))^2 = -\sum_{i=1}^{r_\beta}(\beta^{p_\beta+i}(v))^2 \leqslant 0 \tag{14}$$

Ze wzorów (13) i (14) wynika, że

$$q(v_0) = 0, \tag{15}$$

Równanie (15) w połączeniu z (13) oznacza, że

$$\sum_{i=1}^{p_\alpha}(\alpha^i(v_0))^2 = 0 \quad \text{czyli} \quad \alpha^i(v_0) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1 \ldots p_\alpha.$$

Pamiętamy jednak (układ równań (15)), że także dla pozostałych indeksów $\alpha^i(v_0) = 0$. Wygląda więc na to, że wszystkie współrzędne wektora v_0 w układzie α są równe zero. To jednak oznacza, że $v_0 = 0$. Doprowadziliśmy do sprzeczności. Okazuje się, że nie może być $p_\beta < p_\alpha$. Ponieważ żaden z układów współrzędnychnie jest wyróżniony, nie może być także $p_\beta > p_\alpha$. Pozostaje zatem $p_\beta = p_\alpha$, a to już gwarantuje, że $r_\beta = r_\alpha$. □

Jeśli liczbę współczynników dodatnich w zbiorze A oznaczymy p a ujemnych r, to parę (p, q) nazywamy *sygnaturą* formy Q (lub q) a liczbę $r = p + q$ *rzędem* formy. Znajdowanie sygnatury formy jest ważną umiejętnością potrzebną przy badaniu ekstremów funkcji wielu zmiennych.

Przy badaniu funkcji wielu zmiennych przydatne będzie **wyznaczanie sygnatury formy kwadratowej metodą wyznacznikową**. Niech Q będzie formą dwuliniową symetryczną, której macierz w bazie $e = (e_1, e_2, \dots e_n)$ jest

$$[Q]_e = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}.$$

Poszukamy alternatywnej metody znajdowania bazy diagonalizującej. Nową bazę oznaczać będziemy literą f. Niech $f_1 = e_1$. W podprzestrzeni rozpiętej przez e_1 i e_2 szukamy wektora f_2 takiego, że

$$Q(f_1, f_2) = 0.$$

Wiadomo, że wektor ten jest kombinacją liniową wektorów $e_1 = f_1$ i e_2:

$$f_2 = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2$$

Współczynniki wyznaczymy z warunku $Q(f_1, f_2) = 0$:

$$0 = Q(f_1, f_2) = Q(e_1, \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2) = \lambda^1 Q(e_1, e_1) + \lambda^2 Q(e_1, e_2) = \lambda^1 Q_{11} + \lambda^2 Q_{12}$$

$$\lambda^1 = -\frac{Q_{12}}{Q_{11}}\lambda^2$$

Współczynnik λ^2 jest dowolny, można wybrać na przykład $\lambda^2 = 1$. Otrzymujemy wtedy

$$f_2 = -\frac{Q_{12}}{Q_11}e_1 + e_2 = \frac{1}{Q_{11}}[-Q_{12}e_1 + Q_{11}e_2]$$

W macierzy $[Q]_f$ na diagonali pojawia się $Q(f_2, f_2)$. Obliczmy:

$$Q(f_2, f_2) = Q\left(\frac{1}{Q_{11}}[-Q_{12}e_1 + Q_{11}e_2], \frac{1}{Q_{11}}[-Q_{12}e_1 + Q_{11}e_2]\right) =$$
$$\left(\frac{1}{Q_{11}}\right)^2[(Q_{12})^2Q(e_1, e_1) - 2Q_{12}Q_{11}Q(e_1, e_2) + (Q_{11})^2Q(e_2, e_2)] =$$
$$\left(\frac{1}{Q_{11}}\right)^2[(Q_{12})^2Q_{11} - 2Q_{12}Q_{11}Q_{12} + (Q_{11})^2Q_{22}] =$$
$$\frac{1}{Q_{11}}[Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{12}].$$

Kolejne wektory bazy f konstruujemy na tej samej zasadzie: f_i jest kombinacją liniową wektorów e_1, e_2,..., e_i taką, że $Q(f_1, f_i) = 0$,..., $Q(f_{i-1}, f_i) = 0$. Jak znaleźć odpowiednie współczynniki? Okazuje się, że jest na to ogólna metoda. Dla $i \leqslant n$ oznaczmy D_i wyznacznik macierzy

$$D_i = \det\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1i} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{i1} & Q_{i2} & \cdots & Q_{ii} \end{bmatrix},$$

czyli lewego górnego „kawałka" macierzy $[Q]_e$ i zdefiniujmy wektor f_i wzorem

$$f_i = \frac{1}{D_{i-1}}\det\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1i} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{(i-1)1} & Q_{(i-1)2} & \cdots & Q_{(i-1)i} \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_i \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Powyższy wzór należy rozumieć tak, że stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem ostatniego wiersza. Współczynnikami przy kolejnych wektorach bazy e są odpowiednie dopełnienia algebraiczne (podzielone przez D_i). Okazuje się, że tak zdefiniowane wektory spełniają nałożone przez nas warunki. Nie będziemy tego sprawdzać w całej ogólności. Zauważmy jedynie, że dla $i = 2$ wzór (6) zgadza się z wyprowadzonym przez nas. Przyjrzymy się także przypadkowi $i = 3$. Mamy wtedy:

$$f_3 = \frac{1}{D_2}\det\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}.$$

Współczynniki przy e_k są proporcjonalne do dopełnień algebraicznych. Oznaczmy te dopełnienia A_1, A_2 i A_3. Wtedy

$$A_1 = \det\begin{bmatrix} Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{22} & Q_{23} \end{bmatrix}, \quad A_2 = -\det\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{23} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \det\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} = D_2.$$

Sprawdźmy ile jest $Q(e_1, f_3)$:

$$Q(e_1, f_3) = Q(e_1, \frac{1}{D_2}[e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3]) =$$
$$\frac{1}{D_2}[Q(e_1, e_1)A_1 + Q(e_1, e_2)A_2 + Q(e_1, e_3)A_3] =$$
$$\frac{1}{D_2}[Q_{11}A_1 + Q_{12}A_2 + Q_{13}A_3]$$

Zgodnie ze wzorem na wyznacznik zwanym rozwinięciem Laplace'a, wyrażenie czerwone jest wyznacznikiem pewnej macierzy:

$$[Q_{11}A_1 + Q_{12}A_2 + Q_{13}A_3] = \det \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \end{bmatrix} = 0.$$

Macierz ta ma dwa jednakowe wiersze, więc wyznacznik musi być zero. Podobnie będzie dla $Q(e_2, f_3)$, tylko, że tym razem powtórzy się wiersz drugi. Oznacza to, że $Q(f_1, f_3) = 0$ (bo $e_1 = f_1$) i $Q(f_2, f_3) = 0$, bo f_2 jest kombinacją liniową e_1 i e_2. Trzeba jeszcze policzyć $Q(f_3, f_3)$:

$$Q(f_3, f_3) = \left(\frac{1}{D_2}\right)^2 Q(e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3, e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3) =$$
$$\left(\frac{1}{D_2}\right)^2 Q(e_3A_3, e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3) = \frac{1}{D_2}Q(e_3, e_1A_1 + e_2A_2 + e_3A_3) =$$
$$\frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = \frac{D_3}{D_2}.$$

Macierz $[Q]_f$ jest diagonalna i na diagonali ma wyrazy

$$D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

Licząc wyrazy dodatnie i ujemne w powyższym ciągu znajdujemy sygnaturę formy. Metoda działa jeśli żaden z wyznaczników po drodze nie jest zero. Jeśli jest, wyjściowa baza e nie nadaje do tej metody, albo forma jest zdegenerowana.

TRÓJCA (niezbyt święta)

Okazało się już że formy dwuliniowe symetryczne i formy kwadratowe to właściwie to samo, tylko inaczej zapisane. Spójrzmy teraz na formę dwuliniową jeszcze z innej strony:

Niech Q będzie formą dwuliniową, niekoniecznie symetryczną. Definiuje ona odwzorowanie

$$F_Q : V \longrightarrow V^* \qquad F_Q(v) = Q(v, \cdot) \quad \text{tzn.} \quad Q(v,w) = \langle F_Q(v), w \rangle$$

$Q(v,\cdot)$ to „coś co czeka na wektor, żeby wyprodukować liczbę" a więc kowektor. Oczywiście mając dowolne odwzorowanie $F: V \longrightarrow V^*$ liniowe mogę stworzyć formę dwuliniową Q_F wzorem

$$Q_F(v,w) = \langle F(v), w \rangle$$

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między formami dwuliniowymi a odwzorowaniami $L(V, V^*)$.

Powstaje zatem naturalne pytanie: jaka własność odwzorowania F gwarantuje, że forma Q_F jest symetryczna? Skoro $Q_F(v,w) = Q_F(w,v)$ dla dowolnych v i w to

(*)

$$\langle F(v), w \rangle = \langle F(w), v \rangle$$

Przypomnijmy sobie teraz wzór dotyczący sprzężenia odwzorowania:

$$T: V \longrightarrow W \qquad T^* : W^* \longrightarrow V^*$$

$$\langle \alpha, T(v) \rangle = \langle T^*(\alpha), w \rangle$$

Jeśli weźmiemy $W = V^*$, to $W^* = V$ i zarówno F jak F^* działają z V do V^*. Startując z $\langle F(v), w \rangle$ napisalibyśmy

(**)

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^*(w) \rangle = \langle F^*(w), v \rangle$$

zamieniamy zgodnie z konwencją że forma jest (z lewej)

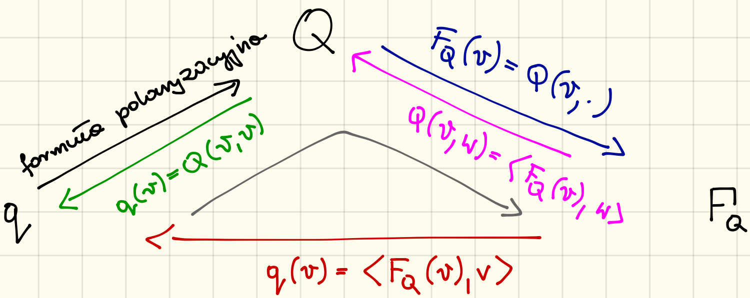
Korzystając z (*) i (**) mamy

$\langle F(w), v\rangle = \langle F(v), w\rangle = \langle F^*(w), v\rangle$ Równość ma zachodzić dla dowolnych v i w, zatem z dowolności v mamy $F(w) = F^*(w)$ a z dowolności w $F = F^*$

Wykazaliśmy zatem, że Q_F symetryczna $\Rightarrow$ F samosprzężone. W drugą stronę rachunek jest w zasadzie identyczny: Jeśli $F = F^*$ to

$Q_F(v,w) = \langle F(v), w\rangle = \langle F^*(w), v\rangle = \langle F(w), v\rangle = Q_F(w,v)$. czyli $Q_F(v,w) = Q_F(w,v)$.

Trzecim elementem trójcy do kompletu z formami dwuliniowymi symetrycznymi i formami kwadratowymi są odwzorowania samosprzężone.



Ostatnią kwestią dotyczącą form i odwzorowań jest sprawa związku między macierzą formy Q a macierzą odwzorowania F_Q. Precyzyjniej mówiąc zadanie polega na znalezieniu macierzy odwzorowania samosprzężonego F_Q związanego z formą Q. Macierz F_Q będziemy zapisywali w bazie e w V i dualnej do niej bazie ε w V^*. Szukamy zatem $[F_Q]^{\varepsilon}_{e}$

Zgodnie z ogólnymi zasadami kolumny tej macierzy to kowektory $F_Q(e_i)$ zapisane w bazie ε, tzn i-ta kolumna macierzy ma postać

$$[F_Q(e_i)]^{\varepsilon}$$

Wiadomo, że współrzędne wektora w danej bazie obliczamy stosując do niego elementy bazy dualnej. Tu tym (ko)wektorem jest $F_Q(e_i)$ a bazą dualną do ε jest e. Zatem j-ta współrzędna w i-tej kolumnie macierzy $[F_Q]_e^{\varepsilon}$ to

$$\langle F_Q(e_i), e_j \rangle = Q(e_i, e_j) = Q_{ij}$$

Macierz odwzorowania F_Q z bazy e do bazy dualnej ε jest równa macierzy formy Q w bazie e

$$[F_Q]_e^{\varepsilon} = [Q]_e$$

ZADANIA NA ĆWICZENIA (jak zwykle są to jedynie przykłady, można ich użyć, albo zastąpić własnymi)

Zadanie 1: Zdiagonalizować metodą Lagrange'a, znaleźć sygnaturę i rząd formy kwadratowej

$$q: \mathbb{R}_2[\cdot] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad q(v) = v(0)\cdot v'(0)$$

Podać bazę diagonalizującą odpowiadającą otrzymanym współrzędnym.

Zadanie 2: Zdiagonalizować metodą Lagrange'a, znaleźć rząd, sygnaturę i bazę diagonalizującą dla formy

$$q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4yz + 5z^2$$

Otrzymaną sygnaturę sprawdzić metodą wyznacznikową.

Zadanie 3: Niech $b: \mathbb{R}_2[\cdot] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $b(v) = \int_{-1}^{1} (v(t))^2 (3t - 5t^3)\,dt$.
Wykazać, że istnieją formy ψ_1 i ψ_2 takie, że

$$b(v) = \psi_1(v)\,\psi_2(v)$$

Sformułować „kryterium przedstawialności" formy kwadratowej w postaci iloczynu dwóch jednoform.

Zadanie 4: $q(X) = \operatorname{tr}\left(X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X\right)$ $X \in \mathbb{R}^2_2$ znaleźć sygnaturę i jakąś bazę diagonalizującą.

Zadanie 5: Czy istnieje $F \in L(V,V)$ taki, że $q_2(v) = q_1(Fv)$. Jeśli tak, znaleźć F

$$V = \mathbb{R}^3, \quad q_1(v) = xy + yz + 2x \qquad q_2(v) = 4xy - z^2$$

Zadanie 6: Trudniejsze: znaleźć bazę wspólnie diagonalizującą parę form

$$q_1(X) = \operatorname{tr}(X^T X), \quad q_2(X) = \det X \qquad X \in \mathbb{R}^2$$