STRUKTURA ENDOMORFIZMU LINIOWEGO.

WSTĘP.

MOTYWACJA

Ćwicząc wzór służący do obliczania wyznaczników zwany rozwinięciem Laplace'a zajmowaliśmy się tzw. macierzami pasmowymi. Wynikiem tego rodzaju rachunków było zazwyczaj równanie rekurencyjne postaci

$$D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}$$

wraz ze znanymi wartościami D_1 i D_2. Żeby doliczyć zadanie do końca należało dodatkowo znać przepis na radzenie sobie z wielomia nowymi równaniami rekurencyjnymi. Przyszła pora na wyjaśnienie skąd wziął się ten przepis. To ma być motywacja a nie ogólna teoria, posłużymy się więc konkretnym przykładem:

Zadanie polega na obliczeniu wyznacznika $D_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & & & \\ 3 & 1 & -2 & & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 \\ & 0 & & & 3 & 1 \end{bmatrix}$ Stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny

$$D_n = 1 \cdot D_{n-1} + (-3) \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & & & \\ 3 & 1 & -2 & \\ & 3 & 1 & -2 \\ & & & \end{bmatrix} = D_{n-1} + 6D_{n-2}$$

Otrzymujemy rekurencję $D_n = D_{n-1} + 6D_{n-2}$ wraz z danymi „początkowymi" $D_1 = 1$, $D_2 = 7$

Dalej przepis mówi, że należy zastąpić D_n przez λ^n i rozwiązać otrzymane równanie kwadratowe: $\lambda^n = \lambda^{n-1} + 6\lambda^{n-2}$ $\quad \lambda^2 = \lambda + 6 \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2$ Dalej należy zapostulować D_n w postaci

$$D_n = a \cdot \lambda_1^n + b \cdot \lambda_2^n = a \cdot 3^n + b \cdot (-2)^n$$

i dobrać współczynniki a i b tak, żeby zgadzało się dla D_1 i D_2:

$$\begin{aligned} 1 &= 3a - 2b \\ 7 &= 9a + 4b \end{aligned} \Rightarrow 9 = 15a \Rightarrow 3 = 5a \quad a = 3/5 \qquad 2b = 3a - 1 = 3 \cdot 3/5 - 1 = 9/5 - 1 = \frac{4}{5} \quad b = \frac{2}{5}$$

$$D_n = \frac{3}{5} 3^n + \frac{2}{5}(-2)^n$$

Przepis działa! A gdybyśmy musieli dać radę bez niego? Uzupełnijmy naszą rekurencję o drugie równanie, trywialne i zapiszmy otrzymany układ w innej postaci:

$$\begin{cases} D_n = D_{n-1} + 6D_{n-2} \\ D_{n-1} = D_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}$$

Równanie rekurencyjne możemy rozwinąć:

$$\begin{bmatrix} D_m \\ D_{m-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} D_{m-1} \\ D_{m-2} \end{bmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{bmatrix} D_{m-2} \\ D_{m-3} \end{bmatrix} = A^3 \begin{bmatrix} D_{m-3} \\ D_{m-4} \end{bmatrix} = \dots = A^{m-2} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = A^{m-2} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problem sprowadza się zatem do znalezienia jawnego wzoru na dowolną potęgę macierzy A. Mniej ambitnie można spróbować znaleźć wartość A^m na ustalonym wektorze $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. Jak to zrobić?

Szczególnie łatwo byłoby, gdyby udało się znaleźć taką bazę w $\mathbb{R}^2$ żeby macierz odwzorowania z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, któremu odpowiada A, była diagonalna. Macierze diagonalne łatwo się mnoży: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{bmatrix}$. Spróbujmy znaleźć taką bazę.

Niech $f = (f_1, f_2)$ będzie bazą diagonalizującą A, tzn $[A]_f^f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Wtedy $Af_1 = \lambda_1 f_1$ i $Af_2 = \lambda_2 f_2$. Istotnie: Pracując w bazie f mamy

$$[\lambda_1 f_1]^f = \lambda_1 [f_1]^f = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [Af_1]^f = [A]_f^f [f_1]^f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Szukamy więc takiej liczby λ i takiego niezerowego wektora $\vec{v}$ żeby $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Wstępnie nie wiemy czy i ile takich liczb jest i czy i ile takich wektorów jest. Z liniowości problemu wynika jedynie, że jeśli istnieje takie λ i $\vec{v}$ to każdy wektor proporcjonalny do $\vec{v}$ jest równie dobry. Jak znaleźć λ i $\vec{v}$?

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0 \Rightarrow (A - \lambda\underline{I})\vec{v} = 0$. Jeśli $\vec{v}$ ma być niezerowy, to znaczy, że $A - \lambda\underline{I}$ musi mieć nietrywialne jądro. Warunkiem koniecznym jest więc znikanie wyznacznika $A - \lambda\underline{I}$:

$$\det(A - \lambda\underline{I}) = 0$$

RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE

Zauważmy, że zawsze wyrażenie $\det(A - \lambda\underline{I})$ jest wielomianem ze względu na λ. Wielomian ten jest stopnia $\dim V$ i nazywa się **wielomianem charakterystycznym**

$$w_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 6\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 6\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

czy to równanie czegoś Państwu nie przypomina?

wielomian charakterystyczny macierzy A

$$\lambda^2-\lambda-6=0 \quad (\lambda-3)(\lambda+2)=0 \quad \lambda=3 \text{ lub } \lambda=-2 \quad \text{tzn } \lambda\in\{3,-2\}$$

równanie charakterystyczne

wartości własne macierzy A

Sp A – spektrum macierzy A.

W naszym przypadku równanie charakterystyczne jest równaniem wielomianowym stopnia 2. Możemy więc mieć maksymalnie dwie różne wartości własne rzeczywiste. (Możemy mieć też jedną, lub dwie zespolone – o komplikacjach powiemy jednak później). Mając λ_1 i λ_2 możemy poszukać wektorów odpowiednich do tych wartości:

$A v = \lambda_1 v$ tzn $v \in \ker A - \lambda_1 I$:

$\lambda_1 = 3$

$$\ker\left(\begin{bmatrix}1 & 6\\ 1 & 0\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \ker\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 1 & -3\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix}1 & -3\end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

Jako f_1 możemy wziąć dowolny wektor proporcjonalny do $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$

$f_1 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$

WEKTORY WŁASNE

$\lambda_2 = -2$

$$\ker\left(\begin{bmatrix}1 & 6\\ 1 & 0\end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \ker\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right\rangle \quad f_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Mamy bazę $f = \left(f_1 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)$ w której A jest diagonalne, $[A]_f^f = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

Wiemy także, że $Af_1 = 3f_1$, $Af_2 = -2f_2$ i, co za tym idzie, $A^m f_1 = 3^m f_1$, $A^m f_2 = (-2)^m f_2$

Możemy więc ① Obliczyć $A^m\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$ rozkładając $\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$ w bazie f, lub ② Obliczyć A^m zamieniając bazy.

① $f_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Elementy bazy dualnej to wiersze macierzy odwrotnej do

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= \tfrac{1}{5}[1 \ \ 2] \\ \varphi_2 &= \tfrac{1}{5}[1 \ \ -3] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \varphi_1\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}\right) f_1 + \varphi_2\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}\right) f_2 = \frac{1}{5} \cdot 9 \cdot f_1 + \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot f_2 = \frac{9}{5} f_1 + \frac{4}{5} f_2$$

$$A^m \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = A^m \left(\frac{9}{5} f_1 + \frac{4}{5} f_2 \right) = \frac{9}{5} A^m f_1 + \frac{4}{5} A^m f_2 = \frac{9}{5} 3^m f_1 + \frac{4}{5} (-2)^m f_2 =$$

$$= \frac{1}{5} \left(9 \cdot 3^m \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 4(-2^m) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 27 \cdot 3^m + 8 \cdot (-2)^m \\ 9 \cdot 3^m - 4 \cdot (-2)^m \end{bmatrix}$$

W naszym problemie rekurencyjnym interesowała nas pierwsza współrzędna powyższego wektora dla $m = n-2$

$$D_n = \frac{1}{5} \left(27 \cdot 3^{n-2} + 8 \cdot (-2)^{n-2} \right) = \frac{1}{5} \left(3 \cdot 3^n + 2 \cdot (-2)^n \right) = \frac{3}{5} \cdot 3^n + \frac{2}{5} \cdot (-2)^n$$

Wynik na szczęście jest zgodny z tym uzyskanym z „przepisu".

② Obliczymy teraz A^m

$$A = [A]_e^e \quad A^m = \left([A]_e^e\right)^m = \left([id]_f^e [A]_f^f [id]_e^f \right)^m =$$

$$[id]_f^e [A]_f^f \underbrace{[id]_e^f \, [id]_f^e}_{\mathbb{1}} [A]_f^f \underbrace{[id]_e^f \, [id]_f^e}_{\mathbb{1}} [A]_f^f [id]_e^f \quad \cdots \quad [id]_f^e [A]_f^f [id]_e^f =$$

$$[id]_f^e \left([A]_f^f\right)^m [id]_e^f = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & (-2)^m \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^m & 2 \cdot 3^m \\ (-2)^m & -3 \cdot (-2)^m \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \cdot 3^m + 2 \cdot (-2)^m & 6 \cdot 3^m - 6 \cdot (-2)^m \\ 3^m - (-2)^m & 2 \cdot 3^m + 3 \cdot (-2)^m \end{bmatrix}.$$

$$A^m = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3\cdot 3^m + 2\cdot(-2)^m & 6\cdot 3^m - 6\cdot(-2)^m \\ 3^m - (-2)^m & 2\cdot 3^m + 3\cdot(-2)^m \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy ogólny wzór (jawny) na A^m. Widzimy, że wszystkie wyrazy macierzowe są kombinacjami 3^m i $(-2)^m$. Współrzędne A^m w działaniu na dowolny wektor też będą kombinacjami liniowymi 3^m i $(-2)^m$. Stąd ogólny przepis na postać rozwiązania rekurencji.

2a Inny sposób obliczania A^m. W wielu zadaniach dotyczących odwzorowań liniowych z przestrzeni wielomianów do przestrzeni macierzy pojawiały się wyrażenia typu $w(A)$ gdzie w jest wielomianem zaś A macierzą kwadratową. Wiemy już zatem że macierze są dobrymi argumentami wielomianów. Obliczenie wartości A^m to nic innego jak wyznaczenie wartości wielomianu $u(t) = t^m$ na macierzy A.

W dalszych rozważaniach potrzebujemy także twierdzenia (które udowodnimy później) które mówi, że wielomian charakterystyczny macierzy A obliczony na tej macierzy daje zero: $w_A(A) = 0$. Twierdzenie jeszcze nie udowodnione, więc sprawdźmy przynajmniej nasz przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 \qquad w_A(A) = A^2 - A - 6\mathbb{1}. \quad A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$w_A(A) = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-1-6 & 6-6 \\ 1-1 & 6-6 \end{bmatrix} = 0$$

Dokonajmy dzielenie z resztą: $u(\lambda) = q(\lambda)\, w_A(\lambda) + r(\lambda) \qquad \lambda^m = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + r(\lambda)$

Żeby znaleźć $u(A) = A^m$ wystarczy znaleźć $r(A)$, bo

$$u(A) = q(A)\cdot \underbrace{w_A(A)}_{=0} + r(A) = r(A)$$

Wiadomo, że r jest wielomianem stopnia conajwyżej jeden bo reszta jest zawsze niższego stopnia niż to przez co się dzieli. Żeby znaleźć resztę wystarczy wykorzystać wartości własne:

$$\underset{\lambda^m}{u(\lambda)} = q(\lambda)\,\underset{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{\omega_A(\lambda)} + \underset{a\lambda+b}{r(\lambda)}$$

$$(\lambda_1)^m = q(\lambda_1)\underbrace{\omega_A(\lambda_1)}_{=0} + a\lambda_1 + b = a\lambda_1 + b$$

$$(\lambda_2)^m = q(\lambda_2)\underbrace{\omega_A(\lambda_2)}_{=0} + a\lambda_2 + b = a\lambda_2 + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda_1)^m = a\lambda_1 + b \\ (\lambda_2)^m = a\lambda_2 + b \end{cases}$$

W naszym przykładzie:

$$\begin{cases} 3^m = 3a + b \\ (-2)^m = -2a + b \end{cases} \qquad 5a = 3^m - (-2)^m \qquad a = \frac{1}{5}\left(3^m - (-2)^m\right)$$

$$b = (-2)^m + 2a = (-2)^m + \frac{2}{5}3^m - \frac{2}{5}(-2)^m = \frac{2}{5}3^m + \frac{3}{5}(-2)^m$$

$$r(\lambda) = \frac{1}{5}\left(3^m - (-2)^m\right)\lambda + \frac{1}{5}\left(2\cdot 3^m + 3(-2)^m\right)$$

$$A^m = r(A) = \frac{1}{5}\left(\left(3^m - (-2)^m\right)A + \left(2\cdot 3^m + 3(-2)^m\right)\mathbb{1}\right) = \frac{1}{5}\left[3^m\left(A + 2\mathbb{1}\right) + (-2)^m\left(-A + 3\mathbb{1}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{5}\left[3^m\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{bmatrix} + (-2)^m\begin{bmatrix}2 & -6\\ -1 & 3\end{bmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\cdot 3^m + 2\cdot(-2)^m & 6\cdot 3^m - 6(-2)^m\\ 3^m - (-2)^m & 2\cdot 3^m + 3\cdot(-2)^m\end{bmatrix}$$

poprzednio wyszło to samo!

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\cdot 3^m + 2\cdot(-2)^m & 6\cdot 3^m - 6\cdot(-2)^m\\ 3^m - (-2)^m & 2\cdot 3^m + 3\cdot(-2)^m\end{bmatrix}.$$

W dalszym ciągu wykładu zajmiemy się sposobami znajdowania wygodnej bazy umożliwiającej wykonywanie na operatorach liniowych różnorodnych przydatnych rachunków. Zajmować się będziemy odwzorowaniami liniowymi działającymi wewnątrz jednej przestrzeni wektorowej czyli endomorfizmami.

$$L(V,V) = End(V)$$

Opisany powyżej przykład łatwo się łatwo, ponieważ wszystko po drodze się udawało: wystarczająca liczba wektorów i wartości własnych... Będziemy musieli jednak rozprawić się ze wszystkimi możliwymi trudnościami jakie tylko mogą wystąpić.