Obserwacja: Niech $Sp(T)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ i niech V będzie nad $\mathbb{C}$ lub V nad $\mathbb{R}$ i wszystkie $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Wtedy operator

$$N = T - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2 - \dots - \lambda_r P_r \quad \text{jest nilpotentny.}$$

Istotnie, $N|_{W_{\lambda_i}} = T_i - \lambda_i 1\!\!1_i$ gdyż $P_i|_{W_{\lambda_i}} = 1\!\!1_i$ zatem $N_i = N|_{W_{\lambda_i}}$ jest nilpotentny na W_{λ_i}. Podprzestrzenie W_{λ_i} są niezmiennicze dla N, zatem $N^{\max\{k_i\}} = 0$. Oznaczmy $D = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r$. Operator D jest diagonalizowalny, a podprzestrzenie W_{λ_i} są dla niego podprzestrzeniami własnymi. Mamy więc

$$T = T - D + D = N + D \quad = \text{nilpotentny + diagonalizowalny.}$$

Ponadto $[N,D]=0$. Istotnie, T komutuje z każdym rzutem P_i, zatem komutuje także z ich kombinacją liniową. Naturalnie $[D,D]=0$ więc $[\underbrace{T-D}_{N},D]=0$

Skonstruowaliśmy rozkład dowolnego operatora zespolonego i niektórych rzeczywistych na sumę komutujących nilpotentnego i diagonalizowalnego. To bywa wygodne.

W każdej przestrzeni W_{λ_i} znajdziemy teraz bazę wygodną dla operatora T.

POSTAĆ JORDANA Wiemy już, że w bazie dostosowanej do rozkładu V na podprzestrzenie pierwiastkowe macierz operatora ma postać blokową. Dalej zajmiemy się działaniem operatora na pojedynczej podprzestrzeni pierwiastkowej. Niech więc W oznacza podprzestrzeń pierwiastkową dla operatora T odpowiadającą wartości własnej λ.

$$T|_W = \underbrace{\lambda 1\!\!1|_W}_{D} + \underbrace{T|_W - \lambda 1\!\!1|_W}_{N} = D + N$$

D jest operatorem diagonalnym na W, każda baza w W jest dla niego dobra – macierz zawsze będzie diagonalna. Co innego N – dla N trzeba znaleźć dobrą bazę. N jest nilpotentny – wiadomo, że $N^{\dim W}=0$. Być może istnieje jeszcze mniejszy wykładnik $q\in\mathbb{N}$ taki, że $N^q=0$. Najmniejsze takie q, tzn

$$N^q=0 \; ; \; N^{q-1}=0$$

nazywamy **stopniem nilpotentności** albo **wysokością** operatora N. Zauważmy, że

$$\{0\}\subset \underset{V_1}{\ker N}\subset \underset{V_2}{\ker N^2}\subset\dots\subset \underset{V_{q-1}}{\ker N^{q-1}}\subset \underset{V_q=W}{\ker N^q = W}$$

Dla każdego $\overset{\neq 0}{v}\in W$ znajdziemy liczbę $h(v)$ taką że $v\in\ker N^{h(v)}$ i $v\notin\ker N^{h(v)-1}$. Liczbę $h(v)$ nazywamy **wysokością wektora** v. Każdy wektor $v\in W$ generuje serię

$$\underset{\overset{\cap}{V_{h(v)}}}{v}\to \underset{\overset{\cap}{V_{h(v)-1}}}{Nv}\to N^2v\to\dots\to \underset{\overset{\cap}{V_1=\ker N}}{N^{h(v)-1}v}\to 0$$

Obserwacja: Wektory tworzące serię są liniowo niezależne: Niech

$$\alpha_0 v+\alpha_1 Nv+\alpha_2 N^2 v+\dots+\alpha_{h(v)-1}N^{h(v)-1}v=0 \qquad / N^{h(m)-1}$$

$$\alpha_0 N^{h(m)-1}v+\underbrace{\alpha_1 N^{h(m)}v+\dots}_{=0}=0$$

wynika, że $N^{h(m)-1}v=0$ a to nie jest prawda, wobec tego $\alpha_0=0$

Dalej aplikujemy $N^{h(m)-2}$ do obu stron i wnioskujemy, że $\alpha_1=0$ i.t.d.

Podprzestrzeń rozpiętą przez $\langle v, Nv,\dots,N^{h(v)-1}v\rangle$ nazywamy **podprzestrzenią cykliczną dla N**. Jest to podprzestrzeń niezmiennicza dla N. Macierz N w bazie $(v,\dots,N^{h(v)-1}v)$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

TWIERDZENIE: W rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych.

PRZYKŁAD:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \omega_T(\lambda) = (2-\lambda)^4$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N nilpotentny stopnia 3. Szukamy $\ker N$

$y - t = 0 \quad z - t = 0$

x – dowolne

$$\begin{bmatrix} x \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_2}$$

dwa liniowo niezależne wektory własne

$\ker N^2$: $\quad z - t = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \\ t \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

początki serii długości 2

$\ker N^3 = W$. Jeśli weźmiemy $w \notin \ker N^2$ dostaniemy serię długości 3.

$$w = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\end{bmatrix} \quad Nw = \begin{bmatrix}+1\\+1\\0\\0\end{bmatrix} \quad N^2 w = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$w \qquad w_1 \qquad \uparrow u_1$ własny

baza (w, w_1, u_1, u_2)

$Nw = w_1$	$D = 2\mathbb{1}$	$Tw = 2w + w_1$
$Nw_1 = u_1$		$Tw_1 = 2w_1 + u_1$
$Nu_1 = 0$		$Tu_1 = 2u_1$
$Nu_2 = 0$		$Tu_2 = 2u_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Podprzestrzeń własną rozłożyliśmy na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych. Macierz ma dwie klatki Jordana.

DOWÓD: indukcyjny: Dla $\dim W = n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy prawdziwość dla $n-1$ i udowodnijmy dla n.

Niech więc $\dim W = n$. Weźmy podprzestrzeń $\mathcal{U}$ zawartą w W wymiaru $n-1$ i taką że $\operatorname{im} N \subset \mathcal{U}$. To jest możliwe, gdyż $\dim \operatorname{im} N < n$. Można zatem obciąć N do $\mathcal{U}$ i skorzystać z założenia indukcyjnego dla $\mathcal{U}$. Mamy więc

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_k \quad \text{i każda } \mathcal{U}_i \text{ jest cykliczna, tzn}$$

$\mathcal{U}_i = \langle v_i, Nv_i, \dots, N^{m_i} v_i \rangle$. Musimy teraz jakoś uzupełnić ten rozkład tak aby był rozkładem nie $\mathcal{U}$ a V. W tym celu weźmy wektor $e \in V \setminus \mathcal{U}$. Wiadomo jednak, że $Ne \in \mathcal{U}$ bo $\mathcal{U}$ zawiera $\operatorname{im} N$. Mogę więc rozłożyć Ne na składowe w $\mathcal{U}_i$

$$Ne = u_1 + u_2 + \dots + u_k$$

Przyglądam się teraz po kolei każdemu z wektorów u_i. Wektor $u_i \in \mathcal{U}_i$

może sam być wektorem, który nadaje się do wygenerowania całej podprzestrzeni cyklicznej U_i, tzn może mieć maksymalną wysokość m_i albo może mieć mniejszą. Jeśli ma maksymalną wysokość to zostawiam sytuację bez zmian, ale jeśli nie ma, tzn sam jest obrazem jakiegoś $w_i \in U_i$, tzn $u_i = Nw_i$, to ten wektor w_i odejmuję od e. Tworzę w ten sposób nowe e'. Ono dalej należy do $W \setminus U$, bo odejmowałam jedynie elementy U. Wektor e' ma teraz taką własność, że

$$Ne' = u_1' + u_2' + \dots + u_k'$$ składowe u_i' w poszczególnych

podprzestrzeniach cyklicznych są albo 0 (jeśli odejmowałam w_i) albo równe u_i i mające największą możliwą w U_i wysokość. Może się też zdarzyć, że odpowiednie w_i były odejmowane dla wszystkich i. Wtedy $Ne' = 0$. Rozważymy przypadki $Ne' = 0$ i $Ne' \neq 0$

$Ne' = 0$: Wtedy e' generuje własną, jednowymiarową przestrzeń cykliczną. Rozkład U uzupełniamy do rozkładu W dodając tę przestrzeń:

$$W = \langle e' \rangle \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$$

$Ne' \neq 0$: Spośród tych U_i dla których u_i' w rozkładzie $Ne' = u_1' + u_2' + \dots + u_k'$ wybieramy to o największej długości. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że jest to U_1, ewentualnie przestawiając kolejność U. Wtedy U_1 zastępujemy przez $\langle e', Ne', \dots, N^{m_1+1} e' \rangle$

$$W \overset{(*)}{=} \langle e', Ne', \dots, N^{m_1+1} e' \rangle \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k.$$

żeby mieć pewność co do tej równości należy wykazać że suma jest istotnie prosta. W szczególności należy wykazać, że przecięcie nowej podprzestrzeni cyklicznej z $U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ jest wektorem zerowym. Niech więc

$$\alpha_0 e' + \underbrace{\alpha_1 Ne' + \alpha_2 N^2 e' + \dots + \alpha_{m_1+1} N^{m_1+1} e'}_{\in U} \in U_2 \oplus \dots \oplus U_k$$

U^{*}

Ponieważ $e' \in \mathcal{U}$, to aby całość mogła należeć do $\mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k$ współczynnik α_0 musi być równy 0. Dalej

$$\alpha_1 Ne' + \alpha_2 N^2 e' + \cdots + \alpha_{m_1+1} N^{m_1+1} e' = \alpha_1 (\underbrace{Ne'}_{u_1' + \cdots + u_k'}) + \alpha_2 N(Ne') + \cdots + \alpha_{m_1+1} N^{m}(Ne') =$$

$$= \alpha_1 (u_1' + \cdots + u_k') + \alpha_2 N (u_1' + \cdots + u_k') + \cdots + \alpha_{m_1+1} N^{m} (u_1' + u_2' + \cdots + u_k') =$$

Powyższą sumę podzielimy na składniki w $\mathcal{U}_1$ i resztę

$$= [\underbrace{\alpha_1 u_1' + \alpha_2 N u_1' + \cdots + \alpha_{m_1+1} N^{m} u_1'}_{\in \mathcal{U}_1}] + \overset{\mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k}{\overset{\Downarrow}{\text{reszta}}}.$$

Wiadomo, że aby całość należała do $\mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k$ składnik w $\mathcal{U}_1$ musi być równy zero, bo $\mathcal{U}_1 \cap (\mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k) = \{0\}$. Wektory $u_1', Nu_1', \ldots, N^{m} u_1'$ są liniowo niezależne, jako elementy serii, więc $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{m_1+1} = 0$.

Wykazaliśmy więc, że $\langle e', Ne', \ldots, N^{m_1+1} e' \rangle \cap \mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k = \{0\}$.

Dodatkowo $\dim W = n+1$, $\dim \mathcal{U}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k = \dim \mathcal{U} - m_1 = n - m_1$.
$\dim \langle e', \ldots, N^{m_1+1} e' \rangle = m_1 + 1$ — bilans wymiarów się zgadza, wobec czego równość (*) zachodzi. ∎