Na wykładzie, ćwiczeniach, a także na kolokwium pojawił się już problem obliczania wartości funkcji, głównie wielomianowych, na operatorach liniowych. Ten wykład ma za zadanie uporządkowanie i rozszerzenie wiedzy na ten temat.

Od strony koncepcyjnej pojęcie wielomianu od operatora nie nastręcza trudności. End(V) jest algebrą, wobec tego wszystkie operacje „przewidywane" przez wielomian są wykonalne: mnożenie operatorów, mnożenie operatora przez liczbę, dodawanie operatorów. W dalszym ciągu pracować będziemy z przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{C}$. Niech w będzie wielomianem stopnia m. Ze wzoru Taylora wynika, że że

$$w(t+h)=w(t)+w'(t)\cdot h+\frac{1}{2!}w''(t)\cdot h^2+\dots+\frac{1}{m!}w^{(m)}(t)\cdot h^m \qquad (*)$$

Wiadomo już, że każdy operator $F\in \mathrm{End}(V)$ rozłożyć można na sumę $F=D+N$, gdzie D jest diagonalizowalny, N nilpotentny, ponadto $[D,N]=0$. Z przemienności operatorów N i D wynika, że przy podstawieniu do $(*)$ można je traktować (od strony rachunkowej) jak liczby. W dziedzinie wielomianów różniczkowanie także ma charakter algebraiczny. Przykład:

$$w(t)=t^3+2t$$

$$w(t+h)=(t+h)^3+2(t+h)=t^3+3t^2h+3th^2+h^3+2t+2h=\underbrace{(t^3+2t)}_{w(t)}+\underbrace{(3t^2+2)}_{w'(t)}h+\underbrace{3t}_{\frac{1}{2}w''(t)}h^2+\underbrace{h^3}_{\frac{1}{6}w'''(t)}$$

$$(D+N)^3=(D+N)(D+N)(D+N)=(D^2+DN+ND+N^2)(D+N)=D^3+\underbrace{DND}+\underbrace{ND^2}+\underbrace{N^2D}+\underbrace{D^2N}+\underbrace{DN^2}+\underbrace{NDN}+N^3=$$
$$D^3+3D^2N+3DN^2+N^3$$

używamy przemienności
N i D.

$$(D+N)^3+2(D+N)=(D^3+2D)+(3D^2+2\cdot 1)N+3DN^2+N^3.$$

W dalszym ciągu używać będziemy funkcji analitycznych (to znaczy zadanych zbieżnym szeregiem potęgowym) o nieskończonym promieniu zbieżności.

$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n$ Funkcję taką rozwinąć można w szereg wokół dowolnego punkt

$$(**)\quad f(t+h)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(t)\frac{1}{m!}h^n$$

Ten wzór (rozwinięcie w szereg Taylora) posłuży do definicji $f(F)$.

Niech k będzie stopniem nilpotentności operatora N w rozkładzie $F = D+N$.
Zapiszmy wzór (* *) wstawiając zamiast $t+h$ $D+N$:

$$f(F)=f(D+N)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(D)N^{n}$$ ze względu na nilpotentność operatora N

suma ta jest de facto skończona: $\sum_{n=0}^{k-1} f^{(n)}(D)N^{n}$. Wystarczy zatem zdefiniować wartość funkcji analitycznych na operatorach diagonalizowalnych. (Pamiętamy, że jeśli f jest analityczna to wszystkie jej pochodne także mają tę własność). Niech więc D będzie diagonalizowalny. Żeby nie mnożyć oznaczeń tę samą literą oznaczymy macierz operatora D w wybranej bazie. Naszym zadaniem jest znaleźć macierz $f(D)$ w tej samej bazie. Niech także Q oznacza macierz przejścia taką że QDQ^{-1} jest diagonalny. Wtedy

$$QDQ^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\underset{\dim V}{\lambda_m}) \qquad D=Q^{-1}\overset{\mathrm{diag}(\bar\lambda)}{\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}Q$$

$$D^{l}=\left[Q^{-1}\mathrm{diag}(\bar\lambda)Q\right]^{l}=Q\,\mathrm{diag}(\lambda)\underbrace{Q^{-1}\,Q}_{\mathbb{1}}\mathrm{diag}(\lambda)\underset{\mathbb{1}}{Q^{-1}}\cdots\underset{\mathbb{1}}{Q}\,\mathrm{diag}(\bar\lambda)Q^{-1}=Q\,\mathrm{diag}(\bar\lambda)^{l}Q^{-1}=$$
$$=Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1^{l},\lambda_2^{l},\dots,\lambda_m^{l})Q^{-1}.$$

$$f(D)=\sum c_nD^{n}=\sum c_n\,Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1^{n},\lambda_2^{n},\dots,\lambda_m^{n})Q^{-1}=Q\left(\sum c_n\,\mathrm{diag}(\lambda_1^{n},\lambda_2^{n},\dots,\lambda_m^{n})\right)Q^{-1}=$$
$$=Q\,\mathrm{diag}\left(\sum c_n\lambda_1^{n},\sum c_n\lambda_2^{n},\dots,\sum c_n\lambda_m^{n}\right)Q^{-1}=Q\,\mathrm{diag}\left(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\dots,f(\lambda_m)\right)Q^{-1}$$

Dla operatorów diagonalizowalnych definiujemy więc funkcję od operatora poprzez funkcję od wartości własnych używając bazy diagonalizującej.

Ostatecznie więc

$$f(F)=f(D+N)=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\underset{\text{funkcje analityczne od } D}{f^{(n)}(D)}N^{n}$$

Zdefiniowanie funkcji od operatora to jedno, a wyznaczanie wartości to drugie. W praktyce zajmować się będziemy macierzami, ponieważ dla ogólnych operatorów i tak zawsze pracujemy w ustalonej bazie. Omówimy dwie metody wyznaczania funkcji od operatora I – metoda „naukowa" opiera się w zasadzie na definicji, tzn polega na wyznaczeniu wygodnej (Jordanowskiej) bazy dla operatora, przeprowadzeniu rachunków w tej bazie a następnie przeliczeniu wyników do wyjściowej bazy. Metodę tę przedstawimy na przykładzie:

Algebra C

Materiały pomocnicze do uczenia się liczenia funkcji od macierzy

Zadanie: Obliczyć $\sin(\frac{\pi}{2}F)$, gdzie $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie: Powyższe zadanie rozwiążemy dwoma sposobami. W pierwszym z nich korzystamy bezpośrednio z definicji funkcji całkowitej od macierzy i całego arsenału analizy spektralnej. Zachęcam państwa do podjęcia próby zrozumienia tej metody. Będzie to pomocne w dalszym państwa naukowym życiu. Drugi sposób jest nieco mniej pouczający, ale za to wygodny jeśli istotne jest szybkie uzyskanie wyniku. Niezależnie od tego, który ze sposobów wybierzemy, zacząć należy od analizy spektralnej, czyli od znalezienia wartości własnych operatora F. Pierwszy sposób wymaga także znalezienia podprzestrzenie własnych i, ewentualnie, pierwiastkowych.

WARTOŚCI WŁASNE: *Wartością własną* operatora F nazywamy liczbę λ taką, że istnieje niezerowy wektor v spełniający równanie $Fv = \lambda v$. Innymi słowy działanie operatora na wektor v sprowadza się do mnożenia go przez liczbę λ. Taki wektor nazywa się *wektorem własnym* F dla wartości własnej λ. Skoro $Fv = \lambda v$ to $Fv - \lambda v = 0$ i dalej $(F - \lambda I)v = 0$. Oznacza to, że jeśli λ jest wartością własną F, to $F - \lambda I$ ma nietrywialne jądro a tym samym jest nieodwracalny. W tej sytuacji $\det(F - \lambda I) = 0$. Daje to metodę wyznaczania wartości własnych. Wartości własne są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $w_F(\lambda) = \det(F - \lambda I)$.

$$w_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-3).$$

Mamy więc dwie wartości własne $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$. Wartość własna λ_1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu charakterystycznego - mówimy, że ma *krotność* dwa. W tej sytuacji jest możliwe, że operator F jest niediagonalizowalny, jeśli przestrzeń własna dla wartości własnej λ_1 jest wymiaru mniejszego niż 2

PODPRZESTRZENIE WŁASNE: Szukamy podprzestrzeni własnej dla wartości własnej $\lambda_1 = -1$:

$$V(-1) = \ker(F - \lambda_1 I) = \ker(F + I) = \ker = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \ker = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2. \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ jest elementem $V(-1)$ to $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ Mamy zatem

$$V(-1) = \{ \begin{bmatrix} -3z \\ -2z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.$$

Ponieważ $\dim V(-1) = 1 < 2$ to istotnie operator F jest niediagonalizowalny i potrzebne będzie znalezienie podprzestrzeni pierwiastkowej dla wartości własnej -1.

Szukamy podprzestrzeni własnej dla wartości własnej $\lambda_2 = 3$:

$$V(3) = \ker(F - \lambda_2 I) = \ker(F - 3I) = \ker = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \ker = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ jest elementem $V(3)$ to $\begin{cases} -x+z=0 \\ y-2z=0. \end{cases}$ Mamy zatem

$$V(3)=\{\begin{bmatrix} z \\ 2z \\ z \end{bmatrix}, z\in\mathbb{R}\}=\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\rangle.$$

Ponieważ F jest niediagonalizowalny, tzn nie istnieje baza wektorów własnych dla F, szukamy podprzestrzeni pierwiastkowej dla wartości własnej λ_1:

$$W(-1)=\ker(F-\lambda_1 I)^2=\ker(F+I)^2=\ker=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 18 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}=\ker=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ jest elementem $W(-1)$ to $x+3y+9z=0$ Mamy zatem

$$W(-1)=\{\begin{bmatrix} -3y-9z \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad y,z\in\mathbb{R}\}=\langle\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\rangle=\langle\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\rangle.$$

Bazę $W(-1)$ wygodnie jest wybrać tak, aby jeden z wektorów należał do $V(-1)$.

WYNIKI ANALIZY SPEKTRALNEJ

$$w_F(\lambda)=-(\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

$$\lambda_1=-1,\quad n_1=2,\quad V(-1)=\langle\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\rangle,\quad W(-1)=\langle\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\rangle,$$

$$\lambda_2=3,\qquad n_2=1,\quad V(3)=\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\rangle.$$

Operator F jest niediagonalizowany. Rozkład $\mathbb{R}^3$ na podprzestrzenie niezmiennicze ma postać

$$\mathbb{R}^3=W(-1)\oplus V(3),$$

baza zgodna z tym rozkładem to:

$$f=\left(f_1=\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\rangle, f_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Metoda "naukowa". Szukamy macierzy operatora $\sin(\frac{\pi}{2}F)$, w bazie standardowej e. Jednak najpierw znajdziemy macierz $[\sin(\frac{\pi}{2}F)]_f^e$ co jest stosunkowo łatwe, a następnie dokonamy zamiany bazy. W tym celu będziemy działać operatorem $\sin(\frac{\pi}{2}F)$ na wektory bazy f. Nie będziemy wyniku zapisywać w bazie f, gdyż i tak chodzi nam ostatecznie o macierz w bazie standardowej e. Będziemy zatem musieli dokonać zamiany bazy tylko z jednej strony. Liczymy więc

$$\sin(\frac{\pi}{2}F)f_1=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{\pi}{2}F)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)f_1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{\pi}{2})^{2n+1}F^{2n+1}f_1}{(2n+1)!}=$$

korzystamy tutaj z faktu, że f_1 jest wektorem własnym, więc działanie operatora F na f_1 polega na mnożeniu f_1 przez λ_1:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{\pi}{2})^{2n+1}(\lambda_1)^{2n+1}f_1}{(2n+1)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{\pi}{2}\lambda)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)f_1 = \sin(\frac{\pi}{2}\lambda_1)f_1 = \sin(-\frac{\pi}{2})f_1 = -f_1$$

Podobny rachunek zrobilibyśmy dla f_3, który też jest wektorem własnym, zatem

$$\sin(\frac{\pi}{2}F)f_3 = \sin(\frac{\pi}{2}\lambda_2)f_3 = \sin(\frac{3\pi}{2})f_3 = -f_3.$$

Gorzej z wektorem f_2, który jest wektorem z przestrzeni pierwiastkowej, a więc wiadomo o nim tylko, że $(F-\lambda_1 I)^2 f_2 = (F+I)^2 f_2 = 0$. Wykorzystajmy to:

$$\sin(\frac{\pi}{2}F) = \sin(\frac{\pi}{2}F - \frac{\pi}{2}\lambda_1 I + \frac{\pi}{2}\lambda_1 I) = \sin(\frac{\pi}{2}(F-\lambda_1 I) + \frac{\pi}{2}\lambda_1 I) =$$

Teraz skorzystamy z tego, że $\frac{\pi}{2}\lambda_1 I$ jest przemienny ze wszystkimi operatorami, w szczególności także z $\frac{\pi}{2}(F-\lambda_1 I)$, więc możemy stosować wzór na sinus sumy taki jak dla argumentu rzeczywistego:

$$= \sin(\frac{\pi}{2}(F-\lambda_1 I))\cos(\frac{\pi}{2}\lambda_1 I) + \cos(\frac{\pi}{2}(F-\lambda_1 I))\sin(\frac{\pi}{2}\lambda_1 I) =$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}(F+I))\cos(-\frac{\pi}{2})I + \cos(\frac{\pi}{2}(F+I))\sin(-\pi 2)I =$$
$$-\cos(\frac{\pi}{2}(F+I)).$$

Rozwijać będziemy względem $F+I$:

$$\sin(\frac{\pi}{2}F)f_2 = -\cos(\frac{\pi}{2}(F+I)) = -(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{\pi}{2}(F+I))^{2n}}{(2n)!})f_2 =$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{\pi}{2})^{2n}((F+I))^{2n}f_2}{(2n)!} =$$

Wypisujemy kilka pierwszych wyrazów (dla n=0, n=1 i n=2)

$$= -(If_2 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2(F+I)^2 f_2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{2})^4(F+I)^4 f_2}{4!}) + \ldots = -f_2,$$

gdyż już drugi wyraz rozwinięcia jest zero.

Podsumowując, mamy

$$\sin(\frac{\pi}{2}F)f_1 = -f_1 \quad \sin(\frac{\pi}{2}F)f_2 = -f_2, \quad \sin(\frac{\pi}{2}F)f_3 = -f_3$$

zatem

$$[\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e{}_f = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Żeby obliczyć $[\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e{}_e$ trzeba dokonać zamiany bazy:

$$[\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e{}_e = [\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e{}_f[\mathrm{id}\,]^f{}_e.$$

Macierz $[\mathrm{id}\,]^f{}_e$ jest macierzą odwrotną do $[\mathrm{id}\,]^e{}_f$, której kolumnami są wektory z bazy f:

$$[\mathrm{id}\,]^e{}_f = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osoba spostrzegawcza zauważa teraz, że w tym konkretnym przypadku $[\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e{}_f = -[\mathrm{id}\,]^e{}_f$ zatem

$$[\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e{}_e = [\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e{}_f[\mathrm{id}\,]^f{}_e = -[\mathrm{id}\,]^e{}_f[\mathrm{id}\,]^f{}_e = -I.$$

Osoba mniej spostrzegawcza liczy macierz odwrotną do $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i mnożąc przez nią $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ z prawej strony otrzymuje wynik. Tak czy inaczej okazuje się, że

$$[\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e{}_e = -I.$$

Metoda szybkich rachunków. Mam nadzieje, że idea tej metody została wyłożona na wykładzie. Przypomnę ją tylko pokrótce. Tak jak można dzielić wielomiany przez siebie z resztą podobnie można dzielić funkcje analityczne przez wielomiany. Mając więc np. funkcję $\sin(\frac{\pi}{2}\lambda)$ możemy zapisać:

$$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda) = \varphi(\lambda)w_F(\lambda) + r(\lambda),$$

gdzie φ jest funkcją analityczną, w_F wielomianem charakterystycznym (można tu użyć dowolnego wielomianu zerującego operator) a r jest resztą, czyli wielomianem stopnia mniejszego niż w_F. Ponieważ $w_F(F) = 0$ to $\sin(\frac{\pi}{2}F) = r(F)$. Wielomian r będziemy nazywać *wielomianem interpolacyjnym*. Pozostaje znaleźć jego współczynniki.

$$r(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Równanie:

$$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda) = r(\lambda)$$

musi być spełnione dla wartości własnych, zatem

$$\begin{cases} \sin(-\frac{\pi}{2}) = a - b + c \\ \sin(\frac{3\pi}{2}) = 9a + 3b + c. \end{cases}$$

Brakuje jeszcze jednego równania. Otrzymamy je porównując pochodne dla wartości własnej -1, która jest wartością podwójną:

$$\frac{\pi}{2}\cos(-\frac{\pi}{2}) = -2a + b.$$

Ostatecznie mamy do rozwiązania:

$$\begin{cases} -1 = a - b + c \\ -1 = 9a + 3b + c \\ 0 = -2a + b, \end{cases} \qquad \text{co daje} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1. \end{cases}$$

Wielomian interpolacyjny r okazuje się więc wielomianem stałym $r(\lambda) = -1$ i ostatecznie

$$\sin(\frac{\pi}{2}F) = r(F) = -I.$$

Druga metoda wyznaczania funkcji od operatora opiera się na obserwacji ze funkcje analityczne można dzielić z resztą przez wielomiany, podobnie jak wielomiany skończonego stopnia. Jeden ze sposobów rozumowania jest następujący:

$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ oznacza, że $f(t)=\lim_{n\to\infty} \vartheta_n(t)$ gdzie ϑ_n jest wielomianem stopnia n $\vartheta_n(t)=\sum_{k=0}^{n} c_k t^k$. Zbieżność jest jednostajna i bezwzględna w obszarze zbieżności. Mówimy tu o funkcjach o nieskończonym promieniu zbieżności. Niech w oznacza wielomian przez który będziemy dzielić. W zastosowaniach będzie to zazwyczaj wielomian charakterystyczny operatora. Każdy z wielomianów ϑ_n możemy podzielić przez w:

$$\vartheta_n = \underset{\text{iloraz}}{q_n}\, w + \underset{\text{reszta}}{r_n} \qquad \deg r_n < \deg w$$

Po obu stronach równości przechodzimy do granicy $n\to\infty$ otrzymując

$f = q\,w + r$ gdzie q jest stosowną funkcją a r wielomianem stopnia mniejszego niż $\deg w$. Oczywiście fakt, że q istnieje i jest analityczna oraz, że r istnieje wymaga dowodu. Opuścimy go jednak w tej formie i zamiast tego przeprowadzimy następujące rozumowanie:

Niech $K=\mathbb{C}$, niech $w(t)=(t-\lambda_1)^{k_1}\cdots(t-\lambda_p)^{k_p}$ $\deg w = k_1+\dots+k_p$. Istnieje dokładnie jeden wielomian przyjmujący zadane wartości wraz z pochodnymi do stopnia k_{i-1} w punktach λ_i $i=1\dots p$. Te zadane wartości i pochodne to oczywiście $f(\lambda_i)$ i pochodne f w λ_i. Oznaczmy odpowiedni wielomian r. Wtedy $(f-r)$ przyjmuje wartość 0 w λ_i, podobnie pochodne $(f-r)$ do stosownego rzędu.

Zapiszmy teraz

$(f-r)=q\cdot w$ stąd $q=\frac{f-r}{w}$ Powstaje pytanie, czy funkcja q jest analityczna. Rozpatrzmy punkt $t=\lambda_i$. Funkcję f-r można rozwinąć wokół tego punktu

$$(f-r)(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-\lambda_i)^n$$

Z faktu, że f i r mają jednakowe wartości i pochodne do rzędu k_i-1 wynika, że de facto powyższa suma zaczyna się od wyrazu $n=k_i$:

$$(f-r)(t)=\sum_{n=k_i}^{\infty} a_n (t-\lambda_i)^n = (t-\lambda_i)^{k_i}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m+k_i}(t-\lambda_i)^n$$

oznacza to, że $(f-r)$ jest „podzielne" przez $(t-\lambda_i)^{k_i}$. Podobnie dla pozostałych czynników w rozkładzie w. Ostatecznie $f-r$ jest podzielna przez w i iloraz jest analityczny. □

Ciąg dalszy jest oczywisty: praktycznie funkcje analityczne od operatorów liczymy tak samo jak wartości wielomianów.

O kompleksyfikacji.

Rozkład przestrzeni na podprzestrzenie pierwiastkowe robiony był przy założeniu, że wielomian charakterystyczny rozkłada się na czynniki liniowe. Oznacza to, że albo $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ albo wielomian charakterystyczny ma jedynie rzeczywiste pierwiastki. Przypadek kiedy $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ i istnieją pierwiastki zespolone nie został omówiony. Zagadnienie to ma znaczenie raczej teoretyczne. Z praktycznego punktu widzenia (jeśli chodzi o obliczanie funkcji od macierzy) traktujemy macierz rzeczywistą jako szczególną macierz zespoloną.

Jeśli jednak chcielibyśmy znaleźć rozkład przestrzeni rzeczywistej V na podprzestrzenie niezmiennicze względem operatora T w sytuacji kiedy operator ma zespolone wartości własne musimy sięgnąć do pojęcia kompleksyfikacji rzeczywistej przestrzeni wektorowej. Niech więc V będzie rzeczywista i niech wielomian charakterystyczny $T\in \mathrm{End}(V)$ zawiera czynnik $(t-\lambda)^k$ gdzie $\lambda\in\mathbb{C}$. Wiadomo wówczas, że także $\bar{\lambda}$ jest wartością własną z tą samą krotnością. Krótko mówiąc wielomian charakterystyczny zawiera czynnik $(t-\lambda)^k(t-\bar{\lambda})^k$. W V nie ma jednak podprzestrzeni własnych dla λ i $\bar{\lambda}$.

Niech $V^{\mathbb{C}}=V\times V$. Parę (v,w) oznaczać będziemy $v+iw$. Wprowadzamy mnożenie przez liczby zespolone wzorem

$$(x+iy)(v+iw)=(xv-yw)+i(yv+xw)$$

Formalnie $(x+iy)\cdot(v,w)=(xv-yw,\ yv+xw)$

Można sprawdzić, że $V^{\mathbb{C}}$ jest zespoloną przestrzenią wektorową zawierającą V jako podprzestrzeń $V\ni v\longmapsto v+i\cdot 0\in V^{\mathbb{C}}$.

Baza $(e_1,\dots,e_n)$ w V może być traktowana jak baza w $V^{\mathbb{C}}$:

$v+iw \in V^{\mathbb{C}}$ $\quad v+iw = v^\alpha e_\alpha + i w^\alpha e_\alpha = \underbrace{(v^\alpha + i w^\alpha)}_{\in \mathbb{C}} e_\alpha$. Kazdy element mozne więc zapisać jako kombinację liniową wektorów e_α z zespolonymi współczynnikami.

$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim V \quad \dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{C}} = 2\dim V.$

Mając $T \in End(V)$ definiujemy $T^{\mathbb{C}} \in End(V^{\mathbb{C}})$ wzorem

$$T^{\mathbb{C}}(v+iw) = Tv + iTw$$

Przy takiej definicji łatwo sprawdzić, że $[T]^e_e = [T^{\mathbb{C}}]^e_e$, wobec tego $\omega_T = \omega_{T^{\mathbb{C}}}$ i $Sp(T) = Sp(T^{\mathbb{C}})$

Operator $T^{\mathbb{C}}$ działa na przestrzeni zespolonej, wobec tego dotyczą go wszelkie rozważania dotyczące podprzestrzeni niezmienniczych i bazy Jordana.

Niech teraz $u \in V^{\mathbb{C}}$ będzie wektorem własnym $T^{\mathbb{C}}$ dla wartości własnej λ. Wektor u można zapisać $u = a+ib$ gdzie $a, b \in V$.

Niech $\lambda = x+iy$. Mamy:

$$\underset{\shortparallel}{T^{\mathbb{C}}}(a+ib) = (x+iy)(a+ib)$$

$$Ta + iTb = (xa-yb) + i(xb+ya)$$

$$\Downarrow$$

$$Ta = xa - yb \quad Tb = xb + ya$$

FAKT: Wektor $\bar{u} = a - ib$ jest własny dla wartości własnej $\bar{\lambda}$

DOWÓD:

$$T^{\mathbb{C}}\bar{u} = T^{\mathbb{C}}(a-ib) = Ta - iTb = (xa-yb) - i(xb+ya)$$

Z drugiej strony $\bar{\lambda}(a-ib) = (x-iy)(a-ib) = (xa-yb) - i(xb+ya) =$
$= T^{\mathbb{C}}\,\bar{u}$

$\square$

Zauważmy teraz, że
$$a = \frac{1}{2}(u+\bar{u})$$
$$b = \frac{1}{2i}(u-\bar{u})$$

Przestrzeń $\langle a, b\rangle$ jest niezmiennicza ze względu na T. Istotnie, wiemy już, że
$$Ta = xa - yb \quad Tb = ya + xb.$$

Wniosek: Z pary sprzężonych wartości własnych związana jest niezmiennicza podprzestrzeń przestrzeni V rozpięta przez część rzeczywistą i urojoną wektora własnego dla $T^{\mathbb{C}}$.

To samo dotyczy podprzestrzeni pierwiastkowych: Stosowne stwierdzenie zostawimy bez dowodu.

FAKT: Podprzestrzenie pierwiastkowe $\ker(T^{\mathbb{C}}-\lambda \underline{I})^k$, $\ker(T^{\mathbb{C}}-\bar{\lambda}\underline{I})^k$ są wzajemnie sprzężone. Oznacza to, że części rzeczywiste i urojone wektorów z $\ker(T^{\mathbb{C}}-\lambda\underline{I})^k$ rozpinają podprzestrzeń niezmienniczą w V odpowiadającą parze wartości własnych $\lambda, \bar{\lambda}$.