Operatory w przestrzeniach hermitowskich i euklidesowych:

Dwa kolejne wykłady poświęcone będą szczególnym rodzajom operatorów liniowych w przestrzeniach z iloczynem skalarnym rzeczywistym i zespolonym. Temat ten ma podwójne znaczenie. Po pierwsze stanowi element klasycznego wykształcenie matematyka i fizyka – pewne pojęcia i fakty po prostu należy znać. Po drugie omawiane typy operatorów występują w mechanice kwantowej, teorii pola klasycznej i kwantowej i w wielu innych teoriach w tej czy innej roli. W szczególności operatory o pewnych własnościach tworzą tzw. klasyczne grupy macierzowe, które koniecznie trzeba znać.

Sprzężenie hermitowskie operatorów: W dalszym ciągu V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym rzeczywistym bądź zespolonym. Iloczyn skalarny zadaje odwzorowanie $V \longrightarrow V^*$, które na tym wykładzie będziemy oznaczali, inaczej niż dotąd, symbolem $\flat$ (bemol), tzn.:

$v \in V$, $v^\flat \in V^*$, $\langle v^\flat, w\rangle = (v|w)$. Odwzorowanie $\flat$ jest liniowym izomorfizmem dla $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ i antyliniowym izomorfizmem dla $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. W obu przypadkach istnieje odwzorowanie odwrotne $\#: V^* \longrightarrow V$, które także jest odpowiednio liniowym lub antyliniowym izomorfizmem.

Uwaga: $v \in V$, $v^\flat \in V^*$

$\varphi \in V^*$ $\varphi^\# \in V$

Obserwacja: Jeśli V jest przestrzenią z iloczynem skalarnym, to V^* także nią jest. Skoro $V \simeq V^*$ przez $\flat$ $(i\ \#)$ to $(\varphi|\psi) = (\psi^\#|\varphi^\#)$

Uwaga na kolejność jest istotna dla $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Sprawdźmy czy kolejność jest dobra:

$$(\lambda\varphi)^\# = \bar{\lambda}\,\varphi^\#$$

$$\bar{\lambda}(\varphi|\psi) = (\lambda\varphi|\psi) = (\psi^\#|(\lambda\varphi)^\#) = (\psi^\#|\bar{\lambda}\varphi^\#) = \bar{\lambda}(\psi^\#|\varphi^\#)$$

$$\bar{\lambda}(\varphi|\psi) = \bar{\lambda}(\psi^\#|\varphi^\#)$$

o.k.

Obserwacja II Jeśli $(e_1,\dots,e_n)$ jest bazą ortonormalną to $e_1^\flat,\dots,e_n^\flat$ jest bazą dualną do e. Baza dualna też jest ortonormalna.

Obserwacja III Wiadomo, że $v = v^i e_i$ i $v^i = \langle \varepsilon^i, v\rangle$. Skoro $\varepsilon^i = e_i^\flat$ to

$$v = \langle \varepsilon^i, v\rangle e_i = \sum_i \langle e_i^\flat, v\rangle e_i = \sum_i (e_i | v) e_i$$

mamy wzór na współrzędne w bazie ortonormalnej

$$v^i = (e_i | v)$$

DEFINICJA: Niech $F \in End(V)$. *Sprzężeniem hermitowskim* operatora F nazywamy operator $F^+ \in End(V)$ dany wzorem

$$F^+ = \# \circ F^* \circ \flat$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\flat"] \arrow[rrr, bend right, "F^+"'] & V^* \arrow[r, "F^*"] & V^* \arrow[r, "\#"] & V \end{tikzcd}$$

Powyższa definicja jest elegancka, ale założę się, że nikt jej nie zapamięta, poza tym niewiele mówi. Spójrzmy za to na pewien rachunek: Dla $v, w \in V$:

$$(F^+ v | w) = (\# \circ F^* \circ \flat(v) | w) = \left([F^*(v^\flat)]^\# \middle| w \right) = \langle F^*(v^\flat), w\rangle =$$
$$\langle v^\flat, F(w)\rangle = (v | F(w))$$

$$(F^+ v | w) = (v | F w)$$

Odwzorowanie F^+ jest jedynym odwzorowaniem $\in End(V)$ dla którego zachodzi powyższa równość dla dowolnych v i w. Sprzężenie hermitowskie wygląda jak sprzężenie zwykłe tyle że jest „względem" iloczynu skalarnego a nie „względem" ewaluacji kowektora z wektorem. Inaczej mówiąc sprzężenie hermitowskie to zwykłe sprzężenie wyrażone w izomorfizmie $V \simeq V^*$

Kto, jak ja, lubi diagramy może pamiętać tak:

$$\begin{tikzcd}
V^* \arrow[r, "F^*"] & V^* \arrow[d, "\#"] \\
V \arrow[u, "b"] \arrow[r, "F^\dagger"] & V
\end{tikzcd}$$

Własności i macierz operatora hermitowsko sprzężonego:

Własności oczywiste i łatwo sprawdzalne:

$$(F+G)^\dagger = F^\dagger + G^\dagger, \qquad (\lambda F)^\dagger = \bar{\lambda} F^\dagger \qquad (F^\dagger)^\dagger = F \qquad (F \circ G)^\dagger = G^\dagger \circ F^\dagger$$

$$\# \circ (\lambda F)^* \circ b = \# \circ (\lambda F^*) \circ b = \bar{\lambda}\, \# \circ F^* \circ b$$

$$(F^\dagger)^\dagger = \# \circ (F^\dagger)^* \circ b = \# \circ (\# \circ F^* \circ b)^* \circ b = \# \circ \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{b^*} \circ F^{**} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \#}}{\#^*} \circ b = \underbrace{\# \circ b}_{1} \circ F \circ \underbrace{\# \circ b}_{1} = F$$

sprawdzają państwo sami.

albo

$$((F^\dagger)^\dagger v \,|\, w) = (v \,|\, F^\dagger w) = \overline{(F^\dagger w \,|\, v)} = \overline{(w \,|\, F(v))} = (F(v) \,|\, w)$$

Macierz $F^{\dagger}$ w bazie ortonormalnej. Niech e ortonormalna. Oznacza to że macierz iloczynu skalarnego jest jednostkowa w tej bazie oraz b i $\#$ mają w bazie wyjściowej i dualnej też macierz równą $\mathbb{1}$.

$$[F]^e_e = \left[[Fe_1]^e, \dots, [Fe_n]^e \right] \quad - \quad F^i{}_j = (e_i | Fe_j)$$

$$\begin{bmatrix} (e_1|Fe_1) \\ (e_2|Fe_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \dots$$

$$(F^{\dagger})^i{}_j = \overline{F^j{}_i}$$

hermitowskie sprzężenie macierzy

$$[F^{\dagger}]^e_e = (e_i | F^{\dagger} e_j) = (Fe_i | e_j) = \overline{(e_j | Fe_i)} = \overline{F^j{}_i}$$

Można by zadawać jeszcze inne pytanie dotyczące $F^{\dagger}$. Np:

co można powiedzieć o $\ker F^{\dagger}$

$v \in \ker F$ tzn $F(v) = 0 \rightarrow \forall w \quad (w|Fv) = 0$ ale $(w|Fv) = (F^{\dagger}w|v)$

czyli $\forall v \in \ker F$ i $\forall w \in V \quad 0 = (F^{\dagger}w|v)$ tzn $(F^{\dagger}w)^b \in (\ker F)^0$

inaczej $\quad \operatorname{im} F^{\dagger} \subset (\ker F)^{\perp}$

Równość wynika z rachunku wymiarów. Ponieważ $\#$ i b są izomorfizmami, to $\dim \ker F^* = \dim \ker F^{\dagger}$ i $\dim \operatorname{im} F^* = \dim \operatorname{im} F^{\dagger}$. Wiadomo też że $\operatorname{im} F^* = (\ker F)^0$

$$\dim \operatorname{im} F^{\dagger} = \dim \operatorname{im} F^* = \dim (\ker F)^0 = \dim (\ker F)^{\perp}$$

$$\operatorname{im} F^{\dagger} = (\ker F)^{\perp}$$

$$\operatorname{im} F = (\ker F^{\dagger})^{\perp} \qquad \ker F^{\dagger} = (\operatorname{im} F)^{\perp}$$

Szczególne klasy odwzorowań:

Odwzorowania zachowujące iloczyn skalarny:

Niech $F \in End(V)$ spełnia $\forall v, w \quad (Fv|Fw) = (v|w)$. Wtedy

(1) F jest izomorfizmem: istotnie $\|Fx\| = (Fx|Fx)^{1/2} = (x|x)^{1/2} = \|x\|$
zatem $\|Fx\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$ i.e.
$Fx = 0 \iff x = 0$

(2) F jest izometrią: $\|Fx - Fy\| = \|F(x-y)\| = \|x-y\|$

(3) $F^+ = F^{-1}$ $\quad (x|y) = (Fx|Fy) = (F^+Fx|y)$ i.e. $x = F^+Fx \rightarrow F^+F = \mathbb{1}$
$\Rightarrow F^+ = F^{-1}$

Odwzorowania zachowujące iloczyn skalarny nazywają się ortogonalne jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub unitarne jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(4) jeśli F, G ortogonalne/unitarne to także $F \cdot G$ ma tę własność; F^{-1} ma tę własność, więc odwzorowania unitarne/ortogonalne tworzą grupę. Jeśli $V = \mathbb{R}^n$ grupę oznaczamy $O(n)$, jeśli $V = \mathbb{C}^n$ to $U(n)$ i nazywamy, odpowiednio grupą ortogonalną lub unitarną.

(5) $Sp(F)$? Niech x będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ operatora ortogonalnego/unitarnego wtedy

$$\|x\|^2 = (x|x) = (Fx|Fx) = (\lambda x|\lambda x) = |\lambda|^2 (x|x) = |\lambda|^2 \|x\|^2$$

$\Rightarrow |\lambda| = 1$ zatem jeśli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ to $\lambda = \pm 1$
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ to $\lambda = e^{i\varphi}$

Uwaga: Operatory ortogonalne miewają zespolone wartości własne. Są one wówczas także liczbami o module 1. Jak zwykle występują parami, tzn jeśli $e^{i\varphi} \in Sp F$ to także $e^{-i\varphi} \in Sp F$. Zespolonym w. własnym nie odpowiadają żadne rzeczywiste wektory własne.

(5) Operatory ortogonalne zachowują ortogonalność podprzestrzeni, tzn. jeśli $\mathcal{U}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą względem F, to $\mathcal{U}^\perp$ też jest podprzestrze nią niezmienniczą. Istotnie niech $\mathcal{U}$ będzie niezmiennicza. Mamy $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$

Weźmy $y \in \mathcal{U}^\perp$ wtedy dla dowolnego $x \in \mathcal{U}$

$0 = (x|y) = (Fx|Fy)$ $\quad Fx \in \mathcal{U}$ (niezmienniczość $\mathcal{U}$) zatem $Fy \in \mathcal{U}^\perp$.

(F jest izomorf.)

(6) Operator ortogonalny ma podprzestrzenie niezmiennicze wymiaru 1 lub 2.

Jeśli wielomian charakterystyczny ma rzeczywiste wartości, tzn $\lambda = \pm 1$ to każdej wartości odpowiada wektor własny x i $\langle x \rangle = \mathcal{U}$ jest niezmiennicza. $\mathcal{U}^\perp$ też jest niezmiennicza i możemy rozpatrywać $F|_{\mathcal{U}^\perp}$.

Jeśli wielomian charakterystyczny ma zespoloną wartość własną λ to także $\bar{\lambda}$ jest wartością własną. Rozpatrzmy teraz

$W = V \times V$ jako zbiór $\quad (v, w) = v + iw$

W jest p.w. nad $\mathbb{C}$ z mnożeniem $(a+ib)(v, w) = (av - bw, aw + bv)$

$F(v + iw) = Fv + iFw$ $\quad F$ jest liniowy nad $\mathbb{C}$ na W. Każda baza w V definiuje bazę $(e, 0)$ w W. $i(e, 0) = (0, e)$. Macierz F w e jest identyczna, czy rozważamy V czy W, wobec tego wartości własne też.

W tej sytuacji wartości własnej zespolonej λ odpowiada wektor własny $x + iy \in W$ $\quad \lambda = a + ib$

$$F(x+iy) = (a+ib)(x+iy) = Fx + iFy = (ax - by) + i(ay + bx) \Rightarrow$$

$Fx = ax - by$

$Fy = bx + ay$

łatwo sprawdzić, że $x - iy$ jest w. własnym dla $\bar{\lambda} = a - ib$

Wtedy podprzestrzeń $\langle x, y \rangle$ jest niezmiennicza dla F (na V). Wtedy $\langle x, y \rangle^\perp$ też jest niezmiennicza i można rozpatrywać F na $\mathcal{U}^\perp$.

Wniosek: Istnieje baza w V w której F ma macierz blokową. Bloki są postaci $\mathbb{1}$, $-\mathbb{1}$ lub $\Pi(\varphi)$, gdzie

$$\Pi(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\lambda = e^{i\varphi} = a + ib \Rightarrow \quad a = \cos\varphi \quad b = \sin\varphi$

$Fx = ax - by = \cos\varphi\, x - \sin\varphi\, y \quad Fy = ay + bx = \cos\varphi\, y + \sin\varphi\, x,$

tam $F_{|u}$ ale $u = \langle x, y \rangle$ ma w bazie (x, y) macierz $\Pi(\varphi)$.