

Lista pytań egzaminacyjnych z Algebry II

czerwiec 2015

Zestawy egzaminacyjne składać się będą z dwóch pytań - pierwsze z zakresu 1-15, drugie 16-36. Osoby, które chcą dostać 5 muszą odpowiedzieć na jedno z pytań wyróżnione kolorem różowym. W zadaniach rachunkowych konkretne dane mogą ulec zmianie, przy zachowaniu ogólnego problemu.

Pytanie 1 Kowektory, przestrzeń sprzężona - definicje, własności, przykłady matematyczne (kowektory na $\mathbb{R}_n[\cdot]$, \mathbb{R}^n ...) i fizyczne.

Pytanie 2 Niech $V = \mathbb{R}_3[\cdot]$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_x \in V^*$ takie, że $\langle \varphi_x, v \rangle = v(x)$. Wykazać, że jeśli $a \neq b$ to φ_a, φ_b są liniowo niezależne. Czy $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$ są liniowo niezależne?

Pytanie 3 Co to jest baza dualna? Znaleźć bazę dualną do bazy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ w \mathbb{R}^2 .

Pytanie 4 Wykazać, że dla skończonego-wymiarowych przestrzeni wektorowych istnieje kanoniczny izomorfizm $V \simeq (V^*)^*$

Pytanie 5 W przestrzeni \mathbb{R}^2 dana jest baza $f = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$. Jak znaleźć bazę dualną? Znaleźć rozkład wektora $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ w bazie f i kowektora $[5 \ 6]$ w bazie dualnej.

Pytanie 6 Niech V, W będą dwiema przestrzeniami wektorowymi, niech także $F \in \mathcal{L}(V, W)$. Podać definicję odwzorowania sprzężonego do F . Wyjaśnić związek macierzy odwzorowania sprzężonego z macierzą odwzorowania wyjściowego w odpowiednich bazach.

Pytanie 7 Co to jest anihilator podprzestrzeni wektorowej? Udowodnić prawdziwość jednej z poniższych równości dla podprzestrzeni wektorowych $U, W \subset V$:

$$(W + U)^\circ = W^\circ \cap U^\circ, \quad (W \cap U)^\circ = W^\circ \cup U^\circ.$$

Pytanie 8 Definicja formy dwuliniowej, przykłady matematyczne i fizyczne, przestrzeń wektorowa form dwuliniowych, jej wymiar, formy symetryczne i antysymetryczne.

Pytanie 9 Co to jest macierz formy dwuliniowej i do czego służy? Znaleźć macierz formy $Q(v, w) = \int_0^1 v(9t + 1)w(t)dt$ określonej na $\mathbb{R}_1[\cdot]$ w bazie $(t + 1, t)$.

Pytanie 10 Wzór na zmianę bazy dla macierzy formy dwuliniowej. Niech $e_1 = f_1 + f_2, e_2 = f_1 - f_2$, $[Q]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć $[Q]_f$.

Pytanie 11 Co to jest forma kwadratowa? Wyprowadzić formułę polaryzacyjną.

Pytanie 12 Sformułować twierdzenie Lagrange'a o diagonalizacji form kwadratowych. Opisać metodę Lagrange'a diagonalizacji.

Pytanie 13 Zdiagonalizować metodą Lagrange'a formę $q(x, y, z) = xy + xz$. Znaleźć bazę diagonalizującą.

Pytanie 14 Sformułować i podać ideę dowodu twierdzenie Sylwestera o bezwładności form.

Pytanie 15 Opisać metodę wyznacznikową znajdowania sygnatury (i bazy diagonalizującej) formę kwadratową.

Pytanie 16 Co to są wartości własne i wektory własne endomorfizmu liniowego? Wykazać, że dwa wektory własne, które odpowiadają różnym wartościom własnym tego samego endomorfizmu są liniowo niezależne

Pytanie 17 Co to jest operator rzutowy? Zapisać macierz operatora rzutu na podprzestrzeń rozpiętą przez wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ wzdłuż podprzestrzeni rozpiętej przez wektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ w bazie kanonicznej w \mathbb{R}^2 .

Pytanie 18 Co to jest rzutowy rozkład jedności? Znaleźć rzutowy rozkład jedności odpowiadający rozkładowi \mathbb{R}^3 na podprzestrzenie niezmiennicze dla operatora T . Jego wielomian charakterystyczny to $w_T(\lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$.

$$T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pytanie 19 Sformułować i udowodnić twierdzenie Cayleya-Hamiltona.

Pytanie 20 Zdefiniować podprzestrzeń pierwiastkową dla endomorfizmu liniowego. Opisać działanie operatora na jego podprzestrzeni pierwiastkowej.

Pytanie 21 Operator nilpotentny: definicja, przykłady, postać kanoniczna, wielomian charakterystyczny...

Pytanie 22 Znaleźć rozkład $T = D + N$ jeśli D jest diagonalizowalny, N nilpotentny i $[D, N] = 0$ dla operatora

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pytanie 23 Postać Jordana macierzy - co to jest, do czego służy. Znaleźć postać Jordana dla

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pytanie 24 Definicja i metody wyznaczania funkcji od operatora liniowego.

Pytanie 25 Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n \sin(n\pi/4)}{2(n!)}$. Znaleźć, jeśli to możliwe, $f(T)$ dla $T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$.

Pytanie 26 Podprzestrzenie niezmiennicze dla operatorów rzeczywistych odpowiadające zespolonym wartościom własnym.

Pytanie 27 Formy 3/2-liniowe: definicja, przykłady, przestrzenie unitarne.

Pytanie 28 Nierówność Schwarzera z dowodem.

Pytanie 29 Odwzorowania muzyczne b, \sharp w przestrzeniach euklidesowych i unitarnych.

Pytanie 30 Odległość podprzestrzeni afinicznych w przestrzeni euklidesowej: definicja, wzory.

Pytanie 31 Dopelnienie ortogonalne, rzuty ortogonalne: definicje, własności...

Pytanie 32 Sprzężenie hermitowskie operatora: definicja, macierz operatora sprzężonego hermitowsko, własności...

Pytanie 33 Operatory ortogonalne w przestrzeni euklidesowej: definicja, własności, spektrum, postać kanoniczna.

Pytanie 34 Operatory unitarne w przestrzeni unitarnej: definicja, własności, spektrum, postać kanoniczna, przykłady.

Pytanie 35 Operatory hermitowskie w przestrzeni unitarnej: definicja, własności, spektrum, postać kanoniczna, przykłady.

Pytanie 36 Twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych z dowodem.