

# Zadania z Algebry I

Seria 1.

12.10.14

1. Rozwiązać równania kwadratowe w ciele  $C$ :  
 $(3+i)z^2 + (3-2i)z + (3-i) = 0$ ;  $z^2 + (2+i)z + 2-2i = 0$ ;  $z^2 - 5z + 7+i = 0$ ;  $(1+i)z^2 + (2+3i)z + 4-i = 0$ ;
2. Sprawdzić, że  $z = 1$  jest rozwiązaniem równania  $z^3 - 9z + 8 = 0$  i wykorzystać to do znalezienia pozostałych rozwiązań tego równania.
3. Rozwiązać w dziedzinie liczb zespolonych równania:  
 $x^3 + 6ix + 4 + 4i = 0$ ,  $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ ,  $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 2 = 0$ ,  
 $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ ,  $(z+i)^5 = \bar{z}^5$ .
4. Sprowadzić do postaci trygonometrycznej wyrażenia:  
 $1 + \cos a + i \sin a$ ;  $1 - a^2 + 2ia$ , gdzie  $a = \operatorname{tg} a$ .
5. Niech  $w = e^{i3\pi/5}$ . Sprawdzić, że  $z = w + \frac{1}{w}$  spełnia równanie  $z^2 + z = 1$ . Jakie równanie spełnia  $w$ ?
6. Niech  $j, j^2$  oznaczać różne od 1 pierwiastki równania  $z^3 = 1$  i niech  $w$  ma znaczenie z poprzedniego zadania. Wykazać, że:  
 $(1 + j^2)^4 = j$ ;  $(1 - j + j^2)(1 + w - w^2) = 4$ ;  $(1 - j)(1 - j^2)(1 - j^4)(1 - j^5) = 9$ .
7. Niech  $w = e^{i2\pi/n}$  i niech  $k$  będzie liczbą naturalną niepodzielną przez  $n$ . Wykazać, że:  
 $1 + w^k + w^{2k} + \dots + w^{(n-1)k} = 0$ ;  
 $1 - w^k + w^{2k} - \dots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)k} = \begin{cases} 0 & n = 2p \\ \frac{2}{1+w^k} & n = 2p + 1 \end{cases}$
8. Dowieść, że:

$$(a) \frac{1+it}{1-it} = e^{2i \operatorname{arctg} t} \text{ dla } t \in \mathbb{R}; \quad (b) \frac{z-1}{z+1} = i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \text{ dla } z = e^{i\varphi}, \varphi \in ]-\pi, \pi[;$$

$$(c) \frac{z-i}{z+i} = i \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \text{ dla } z = e^{i\varphi}, \varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[;$$

$$(d) \text{Jeżeli } \operatorname{tg} \varphi = i \frac{1-z}{1+z}, \text{ to } \operatorname{tg} n\varphi = i \frac{1-z^n}{1+z^n}, \text{ dla } z \in \mathbb{C}, z \neq -1 \neq z^n, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$(e) \left( \frac{1+i \operatorname{tg} x}{1-i \operatorname{tg} x} \right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} nx}{1-i \operatorname{tg} nx}$$

9. Znaleźć liczby zespolone  $z$  spełniające równanie  $z^6 + z^3\bar{z} + \bar{z}^2 = 0$
10. Podać interpretację geometryczną i naszkicować zbiór:  $\{z \in C : \operatorname{Re}(\frac{z-i}{z-5}) = 0\}$ .
11. Wyznaczyć i naszkicować:
  - (a) obraz półpłaszczyzny  $\{z \in C : \operatorname{Im}(z) > 1\}$  w odwzorowaniu  $f(z) := \frac{2z-1}{2z+3}$ ;
  - (b) przeciwobraz  $\{z \in C : 0 < \operatorname{arg}(z) < \pi/4\}$  w odwzorowaniu  $f(z) := \frac{z+i}{z-i}$ ;
  - (c) obraz półpłaszczyzny  $\{z \in C : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  w odwzorowaniu  $f(z) := \frac{z-3}{z+4}$
12. Sprawdzić, że  $\prod_{k=-n}^n (u^k - zu^{-k}) = \prod_{k=-n}^n (u^{2k} - z) = 1 - z^{2n+1}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u := e^{\frac{\pi i}{2n+1}}$  oraz  $z \in \mathbb{C}$ . Zastosować tożsamość do wyprowadzenia wzoru:  $\prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ .
13. Dowieść, że jeśli  $u = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , to  $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - u^k) = n$ . Korzystając z tego wyprowadzić (dla  $m, n \in \mathbb{N}$ ) następujące wzory:  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ ;  $\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$ ;  $\prod_{k=1}^m \sin \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$ .
14. Dowieść, że:

$$\prod_{p=1}^n (z - \lambda \epsilon^p) = z^n - \lambda^n,$$

gdzie  $\epsilon$  jest  $n$ -tym pierwiastkiem z jedności,  $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ .

15. Rozwiązać równania:  
 $(1+i)z^2 + (2+3i)z + 4-i = 0$ ,  $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$ ,  $z^2 - 12\bar{z} + 61 = 0$ ,  
 $z^2 - 15|z| + 54 = 0$ ,  $z^4 + 2i\bar{z}^2 = 0$ ,  $z^3 + 6z + 2 = 0$ ,  $z^3 + 3z^2 - 3z - 1 = 0$ ,  $z^3 - 9z - 9 = 0$ .
16. Wykazać, że:  
 $\sin \frac{\pi}{22} - \sin \frac{3\pi}{22} + \sin \frac{5\pi}{22} - \sin \frac{7\pi}{22} + \sin \frac{9\pi}{22} = \frac{1}{2}$  (wsk: suma pierwiastków 11-tego stopnia z 1 jest równa 0);  
 $\sum_{k=-n}^n \cos k\varphi = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin(\varphi/2)}$  (dla  $\sin \frac{\varphi}{2} \neq 0$ );  
 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k+1)\varphi = 2^n \cos^n \varphi \cos(n+1)\varphi$ .
17. Dla liczby naturalnej  $n$  i  $\varphi \in R$  obliczyć  $\sum_{k=1}^n 2^k \cos(k\varphi)$ .
18. Dla ustalonej liczby naturalnej  $n$ , znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania równania:  $1 + x + x^2 + \dots + x^n = 0$ .
19. Wykazać, że jeśli  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$ , to  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi$ .
20. Obliczyć  $\cos \frac{\pi}{5}$ .