Zadania domowe z Algebry I
Seria 2.

Zadanie 1. Dowieść, że jeśli suma mnogościowa $V_1 \cup V_2$ dwóch podprzestrzeni $V_1, V_2 \subset V$ także jest podprzestrzenią V, to $V_1 \subset V_2$ lub $V_2 \subset V_1$.

Zadanie 2. Niech $V := \mathbb{R}^T$ będzie przestrzenią wektorową funkcji $v : T \to \mathbb{R}$, gdzie $T := \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Określmy wektory (czyli funkcje) $v_0, \ldots, v_5 \in V$ wzorami $v_k(t) := t^k,\ \ t \in T, k \in \overline{0,5}$, w szczególności $v_0 = \text{const} = 1$. Dowieść, że:
(1) układ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 jest liniowo niezależny;
(2) $v_5 \in \langle v_1, \ldots, v_4 \rangle$.

Zadanie 3. Określmy podprzestrzenie $\mathbb{R}^4$ wzorami $V_1 = \langle \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3 \rangle$, $V_2 = \langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_4 \rangle$, gdzie $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_4$ są kolumnami macierzy $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$. Znaleźć: (1) takie bazy V_1 i V_2, że ich wspólne wektory tworzą bazę $V_1 \cap V_2$;
(2) równania opisujące podprzestrzeń $V_1 + V_2$.

Zadanie 4. Niech V_0 będzie przestrzenią rozwiązań układu równań danego przez macierz A, zaś V_1 przestrzenią rozpiętą przez kolumny tej macierzy, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -10 & -7 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, czy $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_1 + V_0$. znaleźć takie bazy V_1 i V_0 aby ich część wspólna stanowiła bazę $V_1 \cap V_0$.

Zadanie 5. Pokazać, że jeżeli V, W, Z - przestrzenie wektorowe, to $(V \oplus W) \oplus Z = V \oplus W \oplus Z$

Zadanie 6. Sprawdzić, że podzbiór

$$V =: \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{ ciąg } y_k := x_{k+1} - x_k \text{ jest ciągiem arytmetycznym}\}$$

jest podprzestrzenią wektorową skończonego wymiaru w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ciągów o wyrazach rzeczywistych. Obliczyć $\dim V$.

Zadanie 7. Rozważmy następujące warunki na podprzestrzenie V_1, V_2, V_3 przestrzeni V:
(1) $V = V_1 + V_2 + V_3$,

(2) $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3$,
(3) $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_3 \cap V_2 = \{0\}$,
(4) każdy wektor $v \in V$ ma dokładnie jeden rozkład $v = v_1 + v_2 + v_3$ na składowe $v_i \in V_i$.
Zbadać, podając dowód lub kontrprzykład, prawdziwość każdej implikacji:
$(1) \wedge (2) \Rightarrow (4)$, $(2) \wedge (3) \Rightarrow (4)$, $(1) \wedge (3) \Rightarrow (4)$.

Zadanie 8. Które z kolumn macierzy $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ należą do przestrzeni V opisanej równaniami $\begin{cases} x^1 - 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 + x^5 = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4 - 3x^5 = 0 \end{cases}$? Znaleźć bazę V.

Zadanie 9. Rozwiązać w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ układy równań:

$$a) \begin{bmatrix} p & 1-p & 1+p \\ 2 & -p & 0 \\ 1 & 0 & 1+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p-2 \\ 4p \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} -1 & 1+p & 1+p \\ -p & 3+p & 2 \\ 1 & 2 & 3+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c) \begin{bmatrix} p & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & p & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d) \begin{bmatrix} p & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -p & t \\ 7 & p & -5 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -p \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10. Wybrać bazę spośród wektorów:
a) $((1,2,3,4),(2,3,6,7),(1,3,3,5),(1,1,2,4),(1,0,2,3))$
b) $(x^2+x+1, 2x^2+3x+7, x^2-x-9)$

Zadanie 11. które z kolumn $\boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ należą do przestrzeni $V := \ker \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$? Czy z tych kolumn można wybrać bazę V?

Zadanie 12. Dowieść, że $\mathbb{R}^4$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V_0 = \ker \boldsymbol{A}$ i $V_1 = \operatorname{im} \boldsymbol{A}$ dla $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; rozłożyć na składowe wektor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 13. Niech $\boldsymbol{S} := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 12 \end{bmatrix}$. Sprawdzić, że $V = \mathbb{R}^4$ jest sumą prostą podprzestrzeni $V_0 = \ker \boldsymbol{S}$ i $V_1 = \operatorname{im} \boldsymbol{S}$ oraz znaleźć macierz $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^4{}_4$ taką, że $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 :\ \boldsymbol{Px}$ jest rzutem $\boldsymbol{x}$ na V_1 wzdłuż V_0.

Zadanie 14. Niech $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} -3 & 7 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker \boldsymbol{A}$, $V_1 := \operatorname{im} \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^4$.

(a) Zbadać, czy $V_0 + V_1$ zawiera jakiś wektor o wszystkich współrzędnych > 0. (b) Znaleźć takie bazy V_0 i V_1, żeby ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$.

Zadanie 15. Niech $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 & 8 \\ -3 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker \boldsymbol{A}$, $V_1 := \operatorname{im} \boldsymbol{A}$. Znaleźć:
(a) takie bazy podprzestrzeni V_0 i V_1, by ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$;
(b) układ równań opisujący podprzestrzeń $V_0 + V_1$ oraz bazę $V_0 + V_1$.

Zadanie 16. Podprzestrzenie $U, V \in \mathbb{R}^4$ zadajmy wzorami $U := \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $V := \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Znaleźć: (a) takie bazy U i V, że ich wspólne wektory tworzą bazę $U \cap V$; (b) równania opisujące $U + V$.

Zadanie 17. Dane są dwie podprzestrzenie $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $V_1 = \{X : \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} X = 0\}$ i $V_2 = \{X : X \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\}$. Znaleźć bazę $V_1 \cap V_2$, bazę $V_1 + V_2$ i równania opisujące $V_1 + V_2$.

Zadanie 18. Sprawdzić, że $\mathbb{R}^4$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni

$$V_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 3y + z - t = 0 \end{cases} \right\}, \qquad V_1 = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

znaleźć rozkład wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ na składowe w tych podprzestrzeniach.

Zadanie 19. Sprawdzić, że dla $n \geq 3$ przestrzeń $\mathbb{R}_n[\cdot]$ jest sumą prostą swoich dwóch podprzestrzeni: $U = \mathbb{R}_2[\cdot]$ oraz $V = \{w : w(-1) = w(0) = w(2) = 0\}$. znaleźć rozkład $w(t) = t^3$ na składowe w U i V.

Zadanie 20. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni:

$$V := \left\{ v \in \mathbb{K}_3[\cdot] : \; v(1) = \dot{v}(0) = -\frac{1}{2}v(0) \right\} \subset \mathbb{K}_3[\cdot]$$

Zadanie 21.

Niech $F \in L(V, W)$, $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ oraz niech $u_1, u_2, \ldots, u_s \in V$ będzie bazą $\ker F$. Dowieść, że $\left(\begin{array}{c} F(v_1), \ldots, F(v_r) \\ \text{są liniowo niezależne} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{c} v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s \\ \text{są liniowo niezależne} \end{array} \right)$.

Zadanie 22. Niech $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V_0 := \ker \boldsymbol{A}$, $V_1 := \operatorname{im} \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$.

(a) Znaleźć takie bazy V_0 i V_1, żeby ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$. (b) Zbadać, czy $\boldsymbol{u} \in V_0 + V_1$.