Zadania domowe z Algebry I
Seria 3.

1. Sprawdzić, że zbiór G wraz z danym działaniem tworzy grupę, wskazać jej element neutralny oraz znaleźć jawny wzór na odwrotność elementu grupy:

   (a) $G := \mathbb{Z}$ z działaniem $m \odot n := m + (-1)^m n$,

   (b) $G :=$ wszystkie funkcje postaci $f(x) := ax + b, a > 0, b \in \mathbb{R}$, ze składaniem odwzorowań,

   (c) $G := [0, a[, a \in \mathbb{R}^+$ z działaniem $x \underset{a}{+} y := \begin{cases} x + y & \text{gdy } x + y < a; \\ x + y - a & \text{gdy } x + y \geq a. \end{cases}$

2. Niech

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$h := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Przedstawić permutacje $f, f^{-1}, gf, hf, hg, fhf^{-1}, f^{-1}gh, h^{-1}g^{-1}f^{-1}$ jako iloczyny rozłacznych cykli.

3. Znaleźć permutacje $\rho, \sigma \in S_{10}$ takie, że $\sigma \circ \sigma = id$, $\rho \circ \rho = id$, oraz

$$\sigma \circ \rho := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Wykazać, że $\sigma : \sqrt[20]{1} \to \sqrt[20]{1}$, dane wzorem $\sigma(z) := iz^3$, jest permutacją. Obliczyć jej znak.

5. Sprawdzić, że wzór $\sigma(x) := 3x - 25\,\mathrm{E}\left(\frac{x-1}{8}\right)$ określa permutację zbioru $X = \overline{0, 25}$. Znaleźć rozkłady σ oraz σ^4 na cykle rozłączne; obliczyć znak i rząd permutacji σ. ($\mathrm{E}(x)$ oznacza część całkowitą x).

6. Sprawdzić, że cykl długości n jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

7. Znaleźć znak permutacji σ, rozkład σ na rozłączne cykle oraz obliczyć $\sigma^{24} := \sigma \circ \ldots \circ \sigma$ jeżeli:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & 3 & 10 & 4 & 2 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

8. Ile jest permutacji $\sigma : \overline{1, 10} \to \overline{1, 10}$ spełniających warunek:
   $\forall k \in \overline{1, 10} : \quad |\sigma(k) - k| \leq 1$?

9. Niech $n \geq 2$. Dowieść, że dla każdego podzbioru $K \subset \overline{1, n-1}$ istnieje dokładnie jedna permutacja $\sigma_K \in S_n$, spełniająca dwa warunki:
   $\forall k \in K : \quad \sigma_K(k) = k + 1, \quad \forall j \in \overline{1, n} \setminus K : \quad \sigma_K(j) \leq j.$

10. Kwadrat podzielony został na $n \times n$ kwadratowych pól. Jaki znak ma permutacja σ zbioru tych pól odpowiadająca a) obrotowi kwadratu o kąt 90^o; b) odbiciu kwadratu względem jego osi symetrii równoległej do pary boków; c) odbiciu kwadratu względem jednej z jego dwóch przekątnych?

11. Czy cykle: $\gamma = (1\,2\,6\,5)$ i $\delta = (2\,3\,5\,4)$ generują grupę S_6?

12. Obliczyć liczbę inwersji oraz znak permutacji jeśli:

$$(a) \quad \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2m-2 & 2m-1 & 2m \\ m+1 & 1 & m+2 & 2 & m+3 & \dots & m-1 & 2m & \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & m+2 & \dots & 2m & 2m+1 & 2m+2 & \dots & 3m \\ 3 & 6 & \dots & 3m & 1 & 4 & \dots & 3m-2 & 2 & 5 & \dots & 3m-1 \end{pmatrix}$$